СОДЕРЖАНИЕ

Учебное издание

Николай Сергеевич Маркин

ПРАКТИКУМ ПО МЕТРОЛОГИИ

Редактор *Т. И. Гулидова*
Оформление художника *В. Г. Лапшина*
Технический редактор *Н. С. Гришанова*
Корректор *М. С. Кабашова*

Сдано в наб. 30.11.93. Подп. в печ. 19.01.94. Формат 60×90 1/16. Бумага типографская. Гарнитура литературная. Печать высокая. Усл. п. л. 11,75. Усл. кр.-отт. 12,0. Уч.-изд. л. 14,21. Тираж 2000 экз. Зак. 2625. Изд. № 1407/07 С 988

Ордена «Знак Почета» Издательство стандартов, 107076, Москва, Колодезный пер., 14.
Калужская типография стандартов, ул. Московская, 256.

Федеральная целевая программа книгоиздания России

УДК 389(076.5)

М26

Маркин Н. С. Практикум по метрологии: Учеб. пособие. — М.: Издательство стандартов, 1994. — 188 с.

Рассматриваются вопросы практического решения задач по метрологии, наиболее часто встречающихся в метрологической деятельности. В доступной форме изложены теоретические положения по метрологии, на основе которых разбирается решение задач и производственных ситуаций по метрологическому обеспечению производства, даны задачи для самостоятельного решения и вопросы для самопроверки.

Для учащихся средних специальных учебных заведений, изучающих предметы метрологии или технических измерений, а также для практических работников, занимающихся метрологической деятельностью.

Табл. 33. Ил. 36. Библиогр.: 28 назв.

$М\frac{2004010000-010}{085(02)-94}$ КБ 21—63—92

ISBN 5-7050-0347-1

1. ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ ОБ ИЗМЕРЕНИЯХ

1.1. ЗНАЧЕНИЕ ИЗМЕРЕНИЙ

В дословном переводе с греческого слово «метрология» означает учение о мерах.

В современной практике метрология означает науку об измерениях, методах и средствах обеспечения их единства и способах достижения требуемой точности.

Развитие материальной культуры человеческого общества и сопровождающее его развитие орудий производства вызвало потребность иметь количественные оценки, дающие возможность раскрыть действующие в природе закономерности, учесть материальные ресурсы, определить качество всевозможной продукции, либо той или иной деятельности человека.

В древние времена люди могли обходиться только счетом интересующих их однородных объектов, например, числа воинов, голов скота, убитой дичи и т. д. Такой счет не требовал понятия о физической величине, установления условных единиц измерения, так как единицами счета служили сами подсчитываемые объекты. Для счета не требовалось и применения специальных технических средств. Счет такого рода еще нельзя назвать измерением, под которым понимается нахождение значения физической величины опытным путем с помощью технических средств.

С развитием человеческого общества возникла потребность количественной оценки непрерывных величин, например, расстояний, массы, линейных размеров и т. д. Эту количественную оценку старались свести к счету, для чего выбирались природные единицы. Так, время измерялось в сутках, годах, линейные размеры — в локтях, ступнях, четвертях, расстояние — в шагах, выстрелах (расстояниях полета стрелы), сутках пути и т. д. На определенном этапе развития человеческое общество стало создавать специальные устройства для более точной количественной оценки величин, характеризующих свойства материи. Так появились часы (песочные, водяные, солнечные, маятниковые), меры длины (локти, футы, аршины), весы, гири и т. д. С появлением этих устройств, называемых средствами измерений, и выбором специальных условных единиц, в которых градуировались средства измерений, стали производиться измерения в нынешнем понимании.

Долгое время измерения производились лишь в повседневной жизни и для целей торговли. Но желание проникнуть в природу физических явлений и использовать их для улучшения жизни человека вызвали развитие науки и техники. Росло число величин, которыми характеризовались те или иные явления. Введение физических величин позволило формулировать законы природы и описывать изучаемые явления в форме математических уравнений. Измерения выполняли чрезвычайно важную роль в технике, так как носили объективный характер. Зачастую измерения осуществлялись с высочайшей точностью, нередко находились на пределе возможностей современной науки и техники. Этим они обусловливали многие научные открытия и технические достижения, которые без этого не могли бы появиться.

В стране ежедневно проводится около 200 млрд. измерений, свыше 4 млн человек считают измерения своей профессией.

Затраты на средства измерений составляют десятки миллиардов рублей. Подсчитано, что число средств измерений растет прямо пропорционально квадрату прироста промышленной продукции. Это означает, что при увеличении объема промышленной продукции в 2 раза число средств измерений может вырасти в 4 раза.

С расширением сферы человеческой деятельности измерения охватывают все новые и новые физические величины, существенно расширяются диапазоны измерений. Так, диапазон измерения длины составляет от 10^{-9} м до десятков миллионов километров, силы электрического тока — от 10^{-16} ампер до сотен ампер, электрического сопротивления — от 10^{-6} до 10^{17} Ом и т. д.

В настоящее время стремительно растут требования к точности измерений, быстроте получения измерительной информации, качеству измерений комплекса физических величин. Автоматизация производства, внедрение быстро переналаживаемых производств обусловливают необходимость полной автоматизации измерений, использование систем автоматического контроля, измерительных роботов. Соответственно, резко возрастают требования к квалификации операторов, к подготовке специалистов в области точных измерений.

Совершенствование методов и средств измерений позволило повышать точность результатов и, как следствие, появилась возможность открытия новых закономерностей в физических явлениях.

Следует также отметить, что необходимый уровень точности определяется и соображениями экономической целесообразности, так как повышение точности, по производственным расчетам, удорожает стоимость измерений в несколько раз. В то же время снижение точности ниже необходимого уровня приводит к браку продукции.

Важным обстоятельством является и значимость результата измерений. В общих случаях результат измерений имеет небольшое значение, в других он играет исключительно важную роль: от точности результата измерений может зависеть научное открытие или жизнь людей (например, измерение уровня радиации).

Измерения, развиваясь, становятся все более сложными, но суть их, заключающаяся в количественном выражении величины на основании эксперимента путем сопоставления величины с одно-

родной величиной, принятой за единицу, осталась неизменной и может быть записана в виде общего уравнения измерений:

$$Q=n[Q], \tag{1.1}$$

где Q — измеряемая физическая величина; n — число единиц; $[Q]$ — единица физической величины.

Особенно важное значение приобретают измерения в современных условиях, так как они являются необходимыми элементами стандартизации и повышения качества продукции.

1.2. ПРЕДМЕТ МЕТРОЛОГИИ

На определенном этапе своего развития измерения привели к возникновению метрологии. Слово «мера» из многих значений в области измерений используется в двух случаях: мера как единица (система русских мер, метрическая система мер) и мера как средство измерений (мера длины, мера массы и т. д.). Долгое время метрология существовала как описательная наука. Ни в древнем мире, ни в средние века не существовало метрологической службы, но имеются сведения о применении образцовых мер и хранении их в церквях и монастырях. В качестве мер до нас дошли: единица веса драгоценных камней — «карат», в переводе означает семя боба; единица аптекарского веса — «гран», в переводе означает зерно. Многие меры имели антропометрическое происхождение и были связаны с конкретной деятельностью человека. Так, уже в Киевской Руси применялись: вершок — длина фаланги указательного пальца, пядь — расстояние между концами вытянутых большого и указательного пальцев, локоть — расстояние от локтя до конца среднего пальца (рис. 1.1).

Древнее происхождение имеют и естественные меры. Например, меры времени. На основе астрономических наблюдений древние вавилоняне установили год, месяц, час. Впоследствии 1/86400 часть среднего периода обращения Земли вокруг своей оси получила название секунды. Тогда же начали появляться и так называемые вещественные меры и единицы измерений. К ним можно отнести создание водяных часов в древнем Вавилоне с измерением времени в минах. Мина равнялась промежутку времени, за который из водяных часов вытекала мина воды. Ее масса составляла около 500 г. Отсюда название минута.

Развитие науки и техники привело к множеству используемых мер в разных странах. Все это вызвало невыразимую путаницу, затруднило международное сотрудничество в торговле, науке и других сферах деятельности.

В России, уже в 1070 годах, во времена великого князя Святослава Ярославича, его «золотой пояс» служил образцовой мерой длины, во времена Ивана Грозного была издана Двинская грамота, регламентировавшая правила хранения и передачи меры сыпучих тел (осьмины). Ее медные экземпляры рассылались на хранение выборным людям (старостам, соцким, целовальникам). С

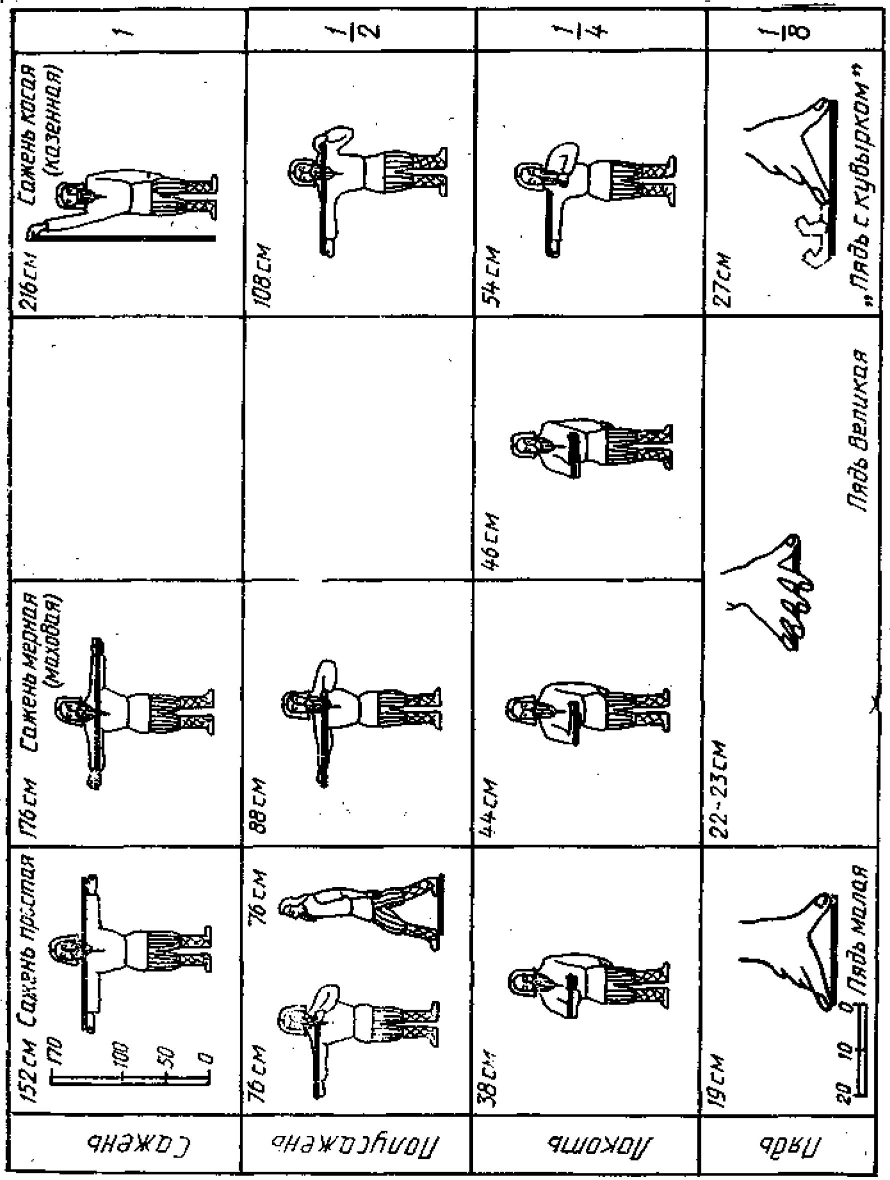

Рис. 1.1

этих мер делались деревянные копии для использования в повседневной жизни.

Развитие торговли, расширение внешних экономических связей требовало не только уточнения мер, но и установления их соотношения с «заморскими», унификации мер, более организованной контрольно-поверочной деятельности. Сведения о такого рода деятельности история также сохранила. Так, в договоре Великого Новгорода с немецкими городами и Готландом (1269 г.) указывались соотношения между мерами договаривающихся сторон. Статьи Соборного уложения 1649 г., Таможенного устава 1653 г., Новогородского устава 1667 г. установили соответствие различных «весов» футу и размер сажени.

Метрологической реформой Петра I к обращению в России были допущены английские меры (футы, дюймы).

Таким образом, в процессе развития науки и техники все большее значение стало приобретать обеспечение единства измерений, т. е. сходимости и сопоставимости результатов измерений.

Простое описание хаотически возникавших единиц уже не могло обеспечить этого единства и в предмет метрологии вошли многие другие вопросы.

В России первым крупным трудом по метрологии явилась книга Ф. И. Петрушевского «Общая метрология», вышедшая в 1848 г. и удостоенная императорской Академией наук Демидовской премии.

В этой работе описаны меры и денежные знаки, применяемые в разных странах. И тем не менее книга содержала, в основном, описание в историческом и географическом аспекте различных единиц измерений, также к нему присоединялись справочные сведения, связанные с единицами, а также описание денежных единиц.

В метрологию начали входить и вопросы научного обоснования единиц измерений и построение их систем, экспериментальное воспроизведение единиц, разработка методов и средств их передачи в практику измерений, разработка общей теории измерений, оценка их точности, разработка методов особо точных измерений с целью определения физических констант и свойств материалов и веществ и др.

Эволюция единиц измерений прошла через несколько исторических этапов. От простого счета, в качестве единиц которого выбирались сами объекты счета, люди перешли к оценке величин, непосредственно не поддающихся счету, однако применяли для этого единицы, не требующие специальных средств измерений и представляющие фактические единицы счета (сутки, шаг и т. д.) По мере повышения требования к точности количественных оценок стали применять средства измерений и приходить к единицам, определяемым вещественными эталонами (ярды, футы, аршины, фунты и т. д.).

Так, указом «О системе Российских мер и весов» (1835 г.) были утверждены эталоны длины и массы — платиновая сажень, равная 7 английским футам, и платиновый фунт, практически совпадающий по весу с бронзовым золоченым фунтом (1747 г.). В 1842 г. на территории Петропавловской крепости в специально построенном здании было открыто первое централизованное метрологическое учреждение России — Депо образцовых мер и весов, в котором хранились эталоны, их копии, а также образцы различных иностранных мер. В Депо также изготовлялись образцовые меры для местных органов, проводилась поверка и сличение образцовых мер с иностранными. Эта деятельность регламентировалась «Положением о мерах и весах» (1842 г.), которое послужило основой государственного подхода к обеспечению единства измерений.

Потребность в унификации единиц и желание сделать их независимыми от случайности и от времени привели к разработке метрической системы мер, которая строилась на основе естественной единицы — метра, равной одной сорокамиллионной части земного меридиана, проходящего через Париж. За единицу площади принимался квадратный метр, за единицу объема — кубический метр, за единицу массы — килограмм — масса кубического дециметра чистой воды при температуре +4 °С.

26 марта 1791 г. Учредительное собрание Франции утвердило предложения Парижской Академии наук. Эти решения создали предпосылки для международной унификации единиц.

В 1871 г., при активном участии России в подготовке этого акта, была подписана Метрическая конвенция (1875 г.) и создано Международное бюро мер и весов с местопребыванием в Севре, близ Парижа. В соответствии с этой конвенцией Россия получила платино-иридиевый эталон единицы массы № 12 и № 26 и эталон единицы длины № 11 и № 28, которые были доставлены в здание Депо образцовых мер и весов.

Особо следует остановиться на деятельности Д. И. Менделеева, сделавшего так много для отечественной метрологии. Период с 1892 г. по 1917 г. называют менделеевским этапом развития метрологии.

В 1893 г. для сохранения в государстве единообразия, верности и взаимного соответствия мер и весов утверждается на базе Депо образцовых мер и весов Главная палата мер и весов, управляющим которой до последних дней жизни был Д. И. Менделеев. Она стала одним из первых в мире научно-исследовательских учреждений метрологического профиля. С этой же целью в ряде стран были созданы научно-исследовательские институты метрологического характера: физико-технический институт в Германии (1887 г.). Национальная физическая лаборатория в Англии (1899 г.), Национальное бюро эталонов в США (1901 г.), а затем и институты в ряде других стран. Под руководством Д. И. Менделеева была проведена работа по созданию русской системы эталонов, сличения их с английскими метрическими мерами, создавалась государственная метрологическая служба, реализована обширная научно-исследовательская программа в области метрологии.

Однако до 1918 г. метрическая система в России внедрялась лишь факультативно, наряду со старой русской и английской (дюймовой) системами.

Серьезные изменения в метрологической деятельности стали возможны с подписанием Советом Народных Комиссаров РСФСР декрета «О введении международной метрической системы мер и весов» 14 сентября 1918 г. С этого момента начался третий этап в развитии метрологии, продолжавшийся до Великой Отечественной войны, главным содержанием которого был переход к государственной метрологической деятельности. Особенное внимание уделялось переходу к метрической системе мер. Отметим также и постановление СНК СССР, принятое в 1925 г., «О признании заключенной в Париже 20 мая 1875 г. Международной метрической конвенции для обеспечения международного единства и усовершенствования метрической системы, имеющей силу для СССР». В это же время создается нормативно-правовая основа метрологической деятельности — стандартизация.

Послевоенный, четвертый, этап характеризуется повсеместным внедрением стандартизации, как главной организационно-правовой формы обеспечения единства измерений.

Для организации этой работы, а также для обеспечения единства измерений в стране была создана Государственная метрологическая служба, входившая в Государственный комитет СССР по управлению качеством продукции и стандартам (Госстандарт СССР) и насчитывавшая в своем составе около 15 научно-исследовательских институтов и 250 территориальных органов. Научно-исследовательские институты ведут работу по усовершенствованию систем единиц, по разработке, хранению и исследованию эталонов, по созданию новых методов поверки и поверочной аппаратуры, определению физических констант, по теоретической метрологии и т. д.

Наряду с Государственной метрологической службой создана в отраслях народного хозяйства и ведомственная метрологическая служба. Проводится также широкая международная деятельность в рамках Международной организации законодательной метрологии (МОЗМ), которая тесно сотрудничает с Международной организацией по стандартизации (ИСО).

Деятельность этих и других организаций направлена на усовершенствование и повышение точности единиц и эталонов, на создание международных стандартов, правил и рекомендаций в области величин, единиц, эталонов, терминов и обозначений.

1.3. ИЗМЕРЕНИЕ И ЕГО ЭЛЕМЕНТЫ

Говоря об измерении, в современной метрологии имеют в виду сопоставление какой-либо величины с однородной, принятой за единицу, т. е. речь идет о количественной оценке физической величины. Физическая величина — свойство общее в качественном отношении многим физическим объектам, но в количественном отношении индивидуальное для каждого объекта. Индивидуальность в количественном отношении понимают в том смысле, что свойство может быть для одного объекта в определенное число раз больше или меньше, чем для другого. Таким образом, физическая величина — это измеренные свойства или характеристики физических объектов или процессов, с помощью которых они могут быть изучены, т. е. найдены свойственные им закономерности. К физическим величинам относятся: длина, масса, время и т. д.

В физике рассматривается большое число величин, для каждого ее раздела характерны свои величины, однако некоторые из них являются общими для различных разделов физики, например, энергия, могущая переходить из одной формы в другую.

Вместе с этим в технике приходится оперировать с большим числом величин, не являющихся непосредственно физическими величинами, но позволяющих оценивать с количественной стороны различные технические устройства. Возникает в этой связи понятие «технические измерения», выполняемые с целью контроля и управления научными экспериментами, контроля параметров изделий технологических процессов, управления движением различных видов транспорта, диагностики заболеваний, контроля загрязненности окружающей среды и т. д. Например, скорость перехода по трубопроводу жидкости или газа, именуемая расходом, есть отношение передачи их массы или объема вещества к времени, грузооборот железной дороги есть сумма произведений массы перевозимых грузов на расстояние перевозки и др.

Величины можно характеризовать своим видом, определяющим качественную сторону, и размером, т. е. количественной стороной. Вид величины это только ее характер без указания к какому объекту она относится. Так, длина вообще, масса вообще. При измерениях же мы имеем дело с конкретными объектами, с которыми связана величина. Например, объектом измерений может быть диаметр обтачиваемого вала (как частный случай длины), количество отпускаемого продукта (как частный случай массы) и множество других величин, связанных с самыми разнообразными объектами.

Следует отметить, что термин «величина» часто применяют в чисто количественном смысле — говорят «величина давления», «различные по величине скорости». В то же время давление и скорость сами по себе являются величинами в указанном выше смысле, поэтому говоря «величина тока» мы по существу говорим «величина величины». Поэтому термин «величина» принято применять только в одном смысле, как понятие, включающее и количественное и качественное содержание, а для указания чисто количественного смысла используется термин «размер величины». Поэтому правильно говорить: не величина давления, а давление, не различные по величине скорости, а просто различные скорости и т. д.

Вторым необходимым элементом измерений является единица измерений, которая может принадлежать какой-либо системе единиц, или быть внесистемной. Она может быть и отвлеченной, но в любом случае она всегда должна участвовать в измерении для выражения полученных результатов. Размер величины всегда выражается некоторым числом принятых единиц измерений. Таким образом, единица измерений — это некоторая частная, конкретная реализация измеряемой величины, числовое значение которой принято равным единице. Единицы некоторой величины могут отличаться по своему размеру, например, метр, фут и дюйм, являясь единицами длины, имеют различный размер: 1 фут $=0{,}3048$ м, 1 дюйм $=25{,}4\cdot10^{-2}$ м.

Измерения всегда являются физическим экспериментом, производимым с помощью средств измерений. Без физического опыта нет и измерений. Основоположник отечественной метрологии Д. И. Менделеев писал: «Наука начинается ... с тех пор, как начинают измерять; точная наука немыслима без меры». Никакие расчеты, даже самые сложные, не могут дать новых сведений о физических свойствах измеряемого объекта, если им не предшествует опыт, осуществляемый с помощью средств измерений. Понятие «средство измерений» означает техническое средство, используемое при измерениях и имеющее нормированные метрологические свойства. Существует огромное количество видов средств измерений, отличающихся по назначению, принципу действия, пределам измерений, точности. Поэтому в метрологии средства измерений классифицируются по определенным признакам.

Существенное значение имеет и метод измерений, т. е. путь выполнения измерений, характеризуемый применяемыми средствами измерений и приемами их использования. Строго говоря метод измерений — совокупность приемов использования принципов и средств измерений. Его не следует отождествлять с процедурой измерений, т. е. с выполнением самого опыта измерения той или иной величины. Разнообразие измеряемых величин и объектов измерений определяют достаточно обширную классификацию методов измерений.

Описанные элементы измерений (величина, единица измерений, средства и метод измерений) позволяют формулировать понятие «измерение». Измерение — нахождение значения физической величины опытным путем с помощью специальных технических средств.

Но, как мы уже отмечали, измеряются не только физические величины, поэтому в настоящее время есть и другое объяснение понятия «измерение». Измерение — совокупность операций, имеющих целью определить значение величины. Здесь определение понятия «измерение» не ограничивается нахождением значения физической величины, нет упоминания о каких-либо технических средствах. Оно однако подходит как к физическим, так и нефизическим величинам. Следовательно, к измерениям можно отнести и различные виды количественного оценивания величин. Результат измерений записывается в виде (1.1).

1.4. КЛАССИФИКАЦИЯ ИЗМЕРЕНИЙ

Измерения весьма разнообразны и классифицировать их можно по различным признакам. В настоящее время принята следующая классификация:

по характеристике точности — равноточные, неравноточные;

по числу измерений в серии — однократные и многократные;

по отношению к изменению измеряемой величины — статические и динамические;

по метрологическому назначению — технические и метрологические;

по выражению результата измерений — абсолютные и относительные;

по общим приемам получения результатов измерений — прямые, косвенные, совместные, совокупные.

Равноточные измерения — ряд измерений какой-либо величины, выполняемых одинаковыми по точности средствами измерений в одних и тех же условиях. Если одно из этих условий не выполняется, то измерения называют *неравноточными.*

Однократное измерение — измерение, выполняемое один раз. Например, определение времени по часам. Если необходима большая уверенность в получаемом результате, то проводятся *многократные измерения,* результат которых получают из нескольких следующих друг за другом измерений. За результат многократного измерения обычно принимают среднее арифметическое значение из результатов однократных измерений, входящих в ряд.

Статическое измерение — измерение физической величины, принимаемой в соответствии с конкретной измерительной задачей за неизменную на протяжении времени измерения. Например, измерение длины детали при нормальной температуре. Если размер физической величины изменяется с течением времени, то такие измерения называют *динамическими.* Примером таких измерений может быть определение расстояния до поверхности земли со снижающегося самолета.

Технические измерения обычно используются в ходе контроля при изготовлении изделий, технологических процессов. Например, измерение давления пара в котле при помощи манометра. Обычно они выполняются с помощью рабочих средств измерений.

Метрологические измерения предназначаются для воспроизведения единиц физических величин или для передачи их размера рабочим средствам измерений. В ходе их выполнения используются эталоны или образцовые средства измерений.

Абсолютное измерение — измерение, приводящее к значению измеряемой величины, выраженному в ее единицах. При измерении длины детали штангенциркулем результат выражается в единицах измеряемых величин (в миллиметрах). Соответственно, в *относительных измерениях* измеряется отношение величины к одноименной величине, играющей роль единицы или измерения величины по отношению к одноименной величине, принимаемой за исходную. Примером может служить измеритель скорости у сверхзвуковых самолетов, показывающий отношение скорости самолета к скорости звука или указатели расхода бензина в автомобилях.

Подробнее рассмотрим прямые, косвенные, совместные и совокупные измерения.

К *прямым* относятся измерения, результаты которых получают с помощью средств измерений, находящихся под воздействием данной измеряемой величины, проградуированной непосредственно в единицах этой величины. При проведении этих измерений, как правило, не требуется проведения каких-либо вычислений.

Математически прямое измерение может быть представлено в виде уже приводившейся формулы (1.1). Числовое значение n, характеризующее разряд величины Q, выраженной в единицах $[Q]$, определяется непосредственно по показаниям мер или измерительных приборов, предназначенных для измерений данной величины Q. Примером прямых измерений могут быть измерения длины линейкой, времени при помощи часов, массы при помощи гирь на равноплечих весах, температуры — термометром, силы тока — амперметром и т. д. Прямое измерение может также заключаться в однократном применении измерительного прибора с непосредственным отсчетом по нему результата, но может включать и несколько повторных наблюдений с вычислением результата как среднего из нескольких измерений. Для получения результата также может потребоваться умножение отсчета по шкале измерительного прибора на цену деления.

Косвенными называют измерения, при которых искомое значение величины находят на основании известной зависимости между этой величиной и величинами, подвергаемыми прямым измерениям. Результат находят из решения уравнения, выражающего эту зависимость. Косвенное измерение можно выразить уравнением

$$Q = f(X, Y, Z, \ldots, W). \qquad (1.2)$$

где Q — измеряемая величина; $X, Y, Z, \ldots, W$ — величины, размер которых определяется из прямых измерений. В этом уравнении ($X, Y, Z \ldots$) представляют конкретные реализации величин, связанных с некоторым определенным объектом. Рассмотрим пример. Требуется измерить удельное электрическое сопротивление некоторого материала. Но так как приборов для прямых измерений удельного сопротивления нет, его можно измерить только косвенным методом. Для этого запишем определяющее уравнение

$$\rho = \frac{RS}{L},$$

где ρ — удельное сопротивление; S — площадь поперечного сечения; L — длина образца.

Если измерить длину L, площадь поперечного сечения S и электрическое сопротивление, то можно вычислить и его удельное сопротивление.

Косвенные измерения достаточно часто встречаются в метрологии, где ими пользуются при воспроизведении единиц. Косвенные измерения позволяют получать более точный результат, чем прямые. Особенно велика роль косвенных измерений в естественных науках, при изучении явлений, не поддающихся прямым измерениям. Например, явления, изучаемые в астрономии, молекулярной и атомной физике и т. д.

Совокупными называются измерения нескольких одноименных величин в различных их сочетаниях, значения которых определяют путем решения системы уравнений. *Совместными* называются измерения нескольких неоднородных величин для установления зависимости между ними. Другими словами, решение системы уравнений позволяет найти каждую из искомых величин отдельно.

Система уравнений, получаемая при совместных или совокупных измерениях, может быть записана в виде:

$$\begin{aligned} &f_1(X_1,X_2,\ldots,Y_{11},Y_{22},\ldots)=0;\\ &f_2(X_1,X_2,\ldots,Y_{21},Y_{22},\ldots)=0;\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &f_n(X_1,X_2,\ldots,Y_{1n},Y_{2n},\ldots)=0, \end{aligned} \qquad (1.3)$$

где X_1, X_2, ... — измеряемые величины; Y_{1n}, Y_{2n} ... — величины, определяемые прямыми или косвенными измерениями.

В системе уравнений (1.3) под величинами X_1, X_2, ..., Y_{1i}, Y_{2i} понимаются конкретные размеры величины, связанные с некоторыми объектами, с которыми имеем дело при данных измерениях. При переходе от одного уравнения к другому изменяются либо условия измерения (при этом группа величин Y_{11}, Y_{21}, ... переходят в группу Y_{12}, Y_{22}, Y_{32} и т. д.) в случае совместных измерений, либо сочетания измеряемых величин (т. е. входящих в группу величин, обозначенных символом X) в случае совокупных измерений. Для пояснения рассмотрим пример совместных измерений. При установлении зависимости электрического сопротивления катушки от температуры измеряют температуру t и сопротивление катушки R, соответствующее этой температуре. Искомыми величинами являются R_{20}, α, β из формулы

$$R_t=R_{20}+\alpha\cdot(t-20)+\beta(t-20)^2,$$

где R_t — сопротивление катушки при температуре t; R_{20} — сопротивление катушки при температуре 20 °C; α и β — коэффициенты температурной формулы.

Изменяя температуру масла в термостате, в которое погружена катушка сопротивления, определяют прямыми измерениями значения R_{t_i} сопротивления катушки и t_i ее температуры. Получают несколько уравнений вида:

$$\begin{aligned} &R_{t_1}=R_{20}+\alpha(t_1-20^\circ)+\beta(t_1-20^\circ)^2;\\ &R_{t_2}=R_{20}+\alpha(t_2-20^\circ)+\beta(t_2-20^\circ)^2,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &R_{t_n}=R_{20}+\alpha(t_n-20^\circ)+\beta(t_n-20^\circ)^2, \end{aligned}$$

В этих уравнениях роль искомых величин X_1, X_2, X_3 играют R_{20}, α и β, а роль изменяющихся величин Y_{1i}, Y_{2i}, определяемых прямыми измерениями, играют R_{t_i} и t_i. Вид функций для всех уравнений один и тот же.

Совместные измерения широко применяются для определения функциональных зависимостей между физическими величинами. В качестве примера совокупных измерений может быть определение действительных значений гирь из одного набора. Для одной гири определяют ее действительное значение путем сравнения с образцовой гирей. Действительные значения остальных гирь находят в результате решения системы уравнений (1.3). Пусть в набор входят следующие гири (цифры означают одновременно обозначения на гирях и номинальное значение массы гирь в граммах): 1, 1*, 1**, 2, 5, 10, 10*, 20, 50, 100. Массу одной из гирь (например, 100 г) определяют прямым измерением (сличением с образцовой гирей вышестоящего разряда), а затем сличают гири в различных сочетаниях, каждый раз определяя разность между сличаемыми номинально равными массами гирь. Получают систему уравнений, решая которое определяют действительное значение массы отдельных гирь:

$$\begin{aligned} &(100)=Y_1,\\ &(100)-\Sigma 100=Y_2;\\ &(50)-\Sigma 50=Y_3;\\ &(20)-(10)-(10^*)=Y_4;\\ &(10)-\Sigma 10=Y_5;\\ &(10^*)-\Sigma 10=Y_6;\\ &(5)-\Sigma 5=Y_7;\\ &(2)-(1)-(1^*)=Y_8;\\ &(2)-(1)-(1^{**})=Y_9;\\ &(2)-(1^*)-(1^{**})=Y_{10}. \end{aligned}$$

Поставленные в круглые скобки числа обозначают массы гирь, имеющих соответствующие обозначения.

Знаками Σ обозначены суммы масс гирь, сумма номинальных значений которых равна стоящему под знаком Σ числу. Y_1 обозначено найденное прямым измерением действительное значение массы 100-граммовой гири, символами Y_2, Y_3 и т. д., найденные также прямыми измерениями разности масс сочетаний гирь, имеющих равные номинальные значения.

Вопросы для самопроверки

1. Дайте определение понятия «метрология». Укажите ее предмет и роль в решении стоящих перед народным хозяйством страны задач по его интенсификации.
2. Назовите и объясните основные проблемы метрологии.
3. Расскажите о Д. И. Менделееве как об основоположнике научной метрологии в России и о его роли в организации госнадзора в стране за единством измерений.
4. Назовите основные этапы развития метрологии в России, укажите основные законодательные акты в области обеспечения единства измерений в каждом из периодов.
5. Дайте определение понятия «измерение».
6. Что такое физическая величина? Приведите примеры.
7. Что такое размер и размерность физической величины? Приведите примеры.
8. Дайте определение понятия «система единиц физических величин».
9. Выведите размерность работы, мощности. Напишите и объясните основное уравнение размерности. Выведите соотношение между ампером и миллиампером.
10. Дайте определение понятий «средство измерений», «погрешность», «поверка».
11. Дайте классификацию средств измерений по метрологическому назначению.
12. Дайте определение понятий «эталон», «образцовое средство измерений», «рабочее средство измерений».

2. ИЗМЕРЯЕМЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

2.1. ПОНЯТИЕ ОБ ИЗМЕРЯЕМЫХ ВЕЛИЧИНАХ

В данном разделе рассмотрены понятия физических величин. С их помощью становится возможным определить физические свойства, количественные характеристики. Получение сведений об этих количественных характеристиках и является задачей измерений. Объектами измерений являются не только физические величины. В экономике, например, существует понятие стоимости — свойства общего для всех видов товарной продукции, но в количественном отношении индивидуального для каждого из них. С появлением денег мерой стоимости стала цена, которая, совершенно очевидно, является не физической, а экономической величиной.

Измерительная информация находит широкое применение в биологии, спорте, медицине, педагогике, социологии и других сферах. Например, выступления гимнастов, фигуристов оцениваются в балльной системе, так же как и знания учащихся. Находят место измерения и в нематериальной сфере. Так, в классической математике распространены меры неопределенности, значимости и др.

Таким образом, измеряемыми стали не только физические величины. Между измеряемыми величинами существуют связи и зависимости, которые выражаются математическими зависимостями и формулами. Но тем не менее, каждую величину можно представить в виде произведения двух сомножителей

$$Q=n[Q],$$

где $[Q]$ — единица измерения величины; Q — числовое значение, которое принято по условию равным 1; n — число единиц, определяемое отношением величины Q к ее единице $[Q]$.

При
$$n=1,\ [Q]=Q; \tag{2.1}$$
$$n=\frac{Q}{[Q]}. \tag{2.2}$$

Для измерения данной величины могут быть выбраны различные единицы. Например, для длины — метр, сажень, фут, миля и т. д. Выбор единицы влияет на числовое значение величины, а на ее размер влияние не оказывает, так как он задан заранее, т. е.

$$Q=n_a[Q]_a=n_b[Q]_b=\dots \tag{2.3}$$

Из этого выражения следует, что числовое значение обратно пропорционально разряду единицы:

$$\frac{n_b}{n_a}=\frac{[Q]_a}{[Q]_b}=\dots \tag{2.4}$$

Из записанных уравнений очевидно, что они не указывают конкретной единицы измерения и их конкретных числовых значений. Сказанное можно подтвердить примером.

Длина желтой линии спектра натрия в ангстремах равна $\lambda_{D_2}=5890$ Å. Она же в метрах, единица в 10^{10} раз большая, составит $\lambda_{D_2}=5890\cdot10^{-10}$ м.

Числовое значение в ангстремах $n_{Å}=5890$, в метрах $n_м=5890\cdot10^{-10}$. Эти же числовые значения могут быть записаны в виде, соответствующем формуле (2.4)

$$\frac{\lambda_{D_2}}{Å}=5890,\quad \frac{\lambda_{D_2}}{м}=5890\cdot10^{-10}.$$

Необходимо отметить, что между самими величинами также могут быть связи и зависимости, которые задаются уравнениями и формулами, отражающими законы природы (например закон Ома $I=\frac{U}{R}$) или определяющими некоторые величины (плотность $\rho=\frac{m}{V}$).

В настоящее время в физике и других науках используется семь основных физических величин — длина, масса, время, термодинамическая температура, сила электрического тока, количество вещества, сила света и две дополнительные: плоский и телесный углы. С их помощью образуются самые разнообразные величины и описываются любые свойства физических объектов и явлений.

В метрологии, использующей теорию вероятностей, основными величинами являются отдельные значения случайных величин, а производными — мера их рассеивания (дисперсия) и др.

2.2. ДЕЙСТВИЯ НАД ВЕЛИЧИНАМИ

Очевидно, что все величины принадлежат к различным видам, так как имеют различный характер. Однородные величины можно складывать и вычитать, чего нельзя делать с величинами различного рода. Так, полностью лишена физического смысла разность между длиной и массой, но разность длин или сумма масс находят широкое применение в измерениях. Вместе с этим, далеко не все однородные величины можно складывать. Например, сложение различных удельных величин также лишено смысла.

Зависимости между величинами обычно выражаются в виде математических уравнений, именуемых уравнениями между величинами. В этих уравнениях каждая из входящих в них величин может быть представлена в соответствии с формулой (1.1).

Уравнение

$$Q=X\cdot Y \tag{2.5}$$

означает, что любая конкретная реализация величины Q количественно и качественно определяется как произведение соответствующих ей конкретных реализаций величин X, Y. Например, в соответствии со вторым законом Ньютона сила может быть определена как произведение массы тела на его ускорение $F=m\cdot a$.

Уравнение $Q=X/Y=X\cdot Y^{-1}$ означает, что величина Q является частным от деления величины X на величину Y. Например, скорость равномерно и прямолинейно движущегося тела может быть определена делением пройденного пути на затраченное время.

Число сомножителей в правой части уравнения может быть и больше двух, а степень, в которую они возводятся выше первой

$$Q=K\cdot X^{\alpha} Y^{\beta}\cdot Z^{\gamma}\ldots \tag{2.6}$$

Числовой коэффициент K может быть равен и не равен единице.

Уравнение (2.6) тогда является уравнением между величинами, когда этот коэффициент не зависит от выбора единиц измерений, а определяет связь между величинами. Например, площадь треугольника равна половине произведения основания на высоту $(1/2\ a\cdot h)$.

Но коэффициент в формуле появился не в связи с выбором единиц измерений, а в связи с формой самих фигур. Аналогично обстоит дело и с физическими величинами. Так, кинетическая энергия определяется формулой

$$E_{к}=\frac{1}{2}\cdot mv^2,$$

где m — масса; v — скорость.

Появление в этой формуле коэффициента 1/2 объясняется только содержанием понятия о кинетической энергии и ее связью со скоростью тела, но не выбором единицы измерений.

2.3. СИСТЕМА ВЕЛИЧИН, РАЗМЕРНОСТЬ

Выше мы установили, что одни физические величины могут определяться через другие с помощью уравнений между величинами. Эти уравнения представляют собой произведения степеней величин.

Выбор некоторого числа основных величин, через которые можно выражать производные, позволяет ввести понятие о размерности. Понятие о системе величин основывается на совокупности величин, связанных системой уравнений. Из них можно выбрать те, которые могут быть измерены без использования других величин. Это есть основные величины для конкретной системы. Выбор таких основных величин произволен и ранее определялся в основном удобством решения конкретной задачи.

Так, для описания явлений механики за основные величины принимали длину, массу и время. Для описания электромагнитных процессов применяли две системы — трех- и четырехразмерную. Таким образом, одной из важнейших характеристик физической величины является размерность. Размерность физической величины отражает связь данной величины с основными величинами, принятыми за основные в рассматриваемой системе. Размерность выражается степенным одночленом с коэффициентом, равным единице, в котором аргументом служат размерности основных величин.

Размерность производной величины показывает, во сколько раз измеряется ее размер при изменении размеров основных величин.

Если размерность производной величины Q выражается произведением длины в степени α, массы в степени β, времени в степени γ и если длина изменяется от L до L', масса — от M до M', время от T до T', то для получения нового размера производной величины следует прежний размер умножить на $(L'/L)^{\alpha}$ $(M'/M)^{\beta}$, $(T'/T)^{\gamma}$. т. е над размерностями можно производить действия умножения и деления. Показатель степени, в которую возведена размерность основной величины, называют показателем размерности.

Размерность обозначается латинским словом dimension.

Записать размерность величины Q можно следующим образом:

$$\dim Q=L^{\alpha} M^{\beta} T^{\gamma} I^{\eta}\ldots \tag{2.7}$$

Очевидно, что размерности широко применяются при образовании производных единиц и проверки однородностей уравнений. Если все показатели степени и размерности величины равны нулю, то такую величину называют безразмерной. Безразмерными являются все относительные величины, т. е. отношение одноименных величин. Например, относительная плотность ρ является относительной величиной: $\dim \rho = L^3 M/L^{-3} M = L^0 M^0 = 1$.

Безразмерными являются логарифмические величины, представляющие собой логарифм относительной величины.

Мы уже отмечали, что выбор системы величин — это процесс произвольный, но основывающийся на реальных объектах, связь между которыми может быть выражена соответствующим выражением. Для создания системы выбирают ряд величин (основных) и посредством их, по уравнениям связи между ними, образуют производные величины.

Исторически первой системой единиц физических величин была метрическая, принятая в 1791 г. во Франции. Она развивалась, и сегодня во всем мире принятая как основная Международная система (СИ).

Поскольку количество физических величин во всех областях физики огромно, то при изучении правил образования наименований, обозначений и применения физических величин приняты общие правила образования наименований и обозначений физических величин, особенности применения наименований по традиционным для метрологии областям измерений.

Буквальные обозначения должны быть по возможности краткими и простыми. Наиболее распространенным является латинский алфавит (причем написанный курсивом), менее — греческий. Как правило, индексы располагаются с правой стороны внизу у основания буквенного обозначения величины. В индексах применяются:

арабские или римские цифры — для обозначения порядковых номеров (например, I_1, I_2, I_3 — сила тока в 1, 2, 3 участках электрической цепи);

буквы латинского или греческого алфавита во всех тех случаях, когда эти индексы широко применяются в международном масштабе;

строчные буквы русского алфавита, соответствующие начальным и характерным буквам наименования процесса, состояния и т. п., во всех случаях, когда отсутствуют стандартизованные международные индексы. Например, $U_ф$ — фазное напряжение, $P_в$ — мощность возбуждения, $\eta_д$ — коэффициент полезного действия.

Вопросы для самопроверки

1. Каким математическим выражением можно представить физическую величину?
2. Укажите принятые условные обозначении величины, числового значения и единицы измерений.
3. Как изменяется числоное значение при изменении размера единицы измерений?
4. Какие действия можно производить над величинами различного вида и над однородными величинами?
5. Как именуются уравнения, связывающие величины?
6. Напишите уравнение, определяющее вновь вводимую величину через основные, в общем виде.

7. От чего зависит числовой коэффициент в уравнении между величинами?
8. Какие основные величины выбирают для построения систем единиц для области механики, электродинамики, термодинамики?
9. Как определяют число основных величин? Можно ли решить этот вопрос однозначно?
10. Что такое уравнение между единицами? Что такое уравнение между числовыми значениями?
11. Каково характерное отличие уравнений между числовыми значениями от уравнений между величинами?
12. Приведите примеры неправильного написания уравнений между числовыми значениями?
13. Что называется размерностью величины и показателем размерности?
14. Какая существует зависимость между размерностью производной величины и ее размером?
15. Какие величины называются безразмерными?
16. Какие системы основных величин (и размерностей) нашли применение в механике, электродинамике, термодинамике?
17. Почему указание только определяющего математического уравнения недостаточно для однозначной характеристики вида величины? Что наряду с ним должно быть указано?
18. Возможно ли взаимное преобразование размерностей величины из одной размерной системы в другую? Если да, то каким путем? Приведите примеры преобразования размерностей.

3. ЕДИНИЦЫ ИЗМЕРЕНИЙ

3.1. РАЗВИТИЕ ЕДИНИЦ ИЗМЕРЕНИЙ

С тех пор, как стали производиться измерения, большое значение приобрели выбор единиц и обеспечение сравнимости результатов измерений.

Числовые значения измеряемых величин зависят от того, какие используются единицы измерения. Применявшиеся первоначально единицы длины, например, определялись размерами частей тела человека (фут, дюйм, локоть, туаза, сажень, аршин...) и были индивидуальными и непостоянными. Произвольность выбора размеров единиц привела к появлению множества местных единиц. Так, в XVIII в. в Европе существовало до сотни различных футов, около полусотни различных миль, свыше 120 различных фунтов.

На развитии торговли, а затем и промышленности все больше сказывались неудобства, происходившие от множественности и произвольности единиц. Развитие науки обусловило возможность изыскивать явления, позволяющие привязать к ним и меры длины и массы, взять их у природы, сделать воспроизводимыми, т. е. проверенными повторными измерениями.

Так возникла метрическая система мер. За единицу длины была принята одна десятимиллионная часть четверти меридиана, проходящего через Париж. Она получила название «метр».

За единицу массы была принята масса одного кубического дециметра дистиллированной воды при температуре ее наибольшей плотности (+4 °C). Она была названа «килограмм».

Были изготовлены платиноиридиевые прототипы метра в виде жезла иксобразной формы и килограмма в виде цилиндра, хранимых в Международном бюро мер и весов.

Тогда же были приняты десятичные соотношения между кратными и дольными единицами и принцип образования их наименований с помощью приставок. Это существенным образом облегчало пересчет значений из одних единиц в другие и позволило отказаться от применения независимых наименований для отдельных кратных и дольных единиц.

Первоначально в метрическую систему входили (под системой единиц понимаем совокупность единиц основных и производных величин) четыре величины: длина, масса, площадь и объем. С развитием науки и техники метрическая система мер стала дополняться единицами других величин, но выбор единиц производили вне связи с другими отраслями. Это привело к введению в практику различных единиц для одной и той же по своей физической природе величины. Примерами могут служить единицы давления и напряжения, работы и энергии. Единицы выбирались произвольно и по своему размеру, исходя из удобства методов измерений (например, измерение давления по высоте ртутного столба той или иной жидкости).

Все это создавало также неудобства в применении единиц. Для ликвидации такого неудобства, т. е. множественности систем единиц, К. Гауссом в 1832 г. были сформулированы основные правила создания единиц:

1) выбираются основные физические величины;

2) устанавливаются единицы основных физических величин; Размеру каждой основной физической величины приписано числовое значение, равное единице. Выбор его является произвольным и определяется только удобством применения. Эти размеры, называемые единицами основных физических величин, закрепляются законодательным путем;

3) устанавливают единицы производных физических величин.

К. Гауссом была разработана система единиц, названная им абсолютной, с основными единицами — миллиметр, миллиграмм и секунда. Ученый В. Вебер распространил предложенный К. Гауссом метод образования производных единиц на электрические величины (электродвижущую силу, силу тока, сопротивление).

Метод, указанный Гауссом и Вебером, был в последующем применен для построения электростатической и электромагнитной систем СГС (сантиметр, грамм, секунда), принятых комиссией Британской ассоциации для развития наук. Число систем единиц продолжало увеличиваться и в результате было создано и внедрено в практику довольно много различных систем, основанных на метрических единицах, например в области механики:

сантиметр — грамм — секунда (СГС),

метр — тонна — секунда (МТС),

метр — килограмм — секунда (МКС),

метр — килограмм-сила — секунда (МКГСС).

В области электродинамики:

сантиметр — грамм — секунда электростатическая (СГС Е),

сантиметр — грамм — секунда электромагнитная (СГС М)

сантиметр — грамм — секунда симметрическая или Гауссова (СГС).

Кроме этих, находили широкое применение и другие системы: МКСА, МКГСС, МКСГ и др.

Из приведенных примеров о развитии единиц очевидно, что в этом развитии не было общего, объединяющего принципа. Единицы зачастую подбирали для отдельно взятых групп величин. Это и приводило к большой пестроте единиц.

В России до декрета Совнаркома РСФСР от 14 сентября 1918 г. применялись русские меры, которые формировались на протяжении многих веков вместе с развитием Российского государства.

Замечательны слова Д. И. Менделеева «... из всех систем мер и веса только три: английская, французская (метрическая) и русская отличаются полною разработкой и выдерживают научную критику».

Примерами русских единиц могут служить такие, как мера длины аршин (1 аршин=0,7112 м), разделенный на 16 вершков (1 вершок=44,45 мм), служивший образцовым средством в XIX в. Тем не менее российские меры стремились сделать сопряженными с английскими. В 1803 г. придворный механик Р. Гайнам изготовил образцовые аршины, взяв за основание английский фут (1 аршин=28 английским дюймам), т. е. в России отчетливо прослеживалась идея единообразия мер и создания национальных эталонов.

С подписанием декрета Совнаркома РСФСР от 14 сентября 1918 г. вместо этих мер на всей территории страны была введена метрическая система мер, основанная на эталонах метра и килограмма.

И тем не менее по мере развития науки и техники возникали все новые и новые системы единиц, пока их обилие не стало тормозом научно-технического прогресса.

В 1960 г. XI Международная конференция по мерам и весам приняла Международную систему единиц физических величин, получившую у нас в стране сокращенное название СИ (от начальных букв SI в словах System Internationale).

3.2. КЛАССИФИКАЦИЯ ЕДИНИЦ ИЗМЕРЕНИЙ. ШКАЛЫ

Ранее мы уже ввели понятие о единице измерений и определили ее как одну из конкретных реализаций рассматриваемой величины, числовое значение которой принято равным единице. Единица качественно не отличается от величины и имеет одинаковую с ней размерность. Единица имеет вполне определенный размер, отличающий ее от других единиц той же величины. Например, метр, фут, дюйм — все они являются единицами длины (их размерность одинакова), но имеют различный размер: 1 фут$=0{,}3048$ м, 1 дюйм$=25{,}4\times10^{-3}$ м.

Так же как и величины, единицы могут быть размерными и безразмерными.

Безразмерные единицы устанавливаются либо для величин, которые не могут быть выражены через основные (например, угол, количество частиц), либо для величин, представляющих собой отношение двух величин одного вида, т. е. относительные величины (относительное удлинение, коэффициент полезного действия и т. д.). Часто относительные величины выражают не в относительных единицах, а в процентах (%) или промилле (‰).

Размерные единицы можно выбрать произвольно, без связи с другими единицами, а можно при сохранении произвольного выбора размера единицы ввести в ее определение некоторую зависимость от других единиц.

К первой категории относят независимые единицы, ко второй — произвольно выбранные единицы.

Независимые единицы могут определяться размерами условно выбранных искусственно изготовленных эталонов, например, эталоны метра (в виде платиноиридиевого прототипа), килограмма. В то же время, стремление сделать единицы более долговечными, независимыми от старения, случайной порчи вызвало появление «естественных эталонов», т. е. приемов воспроизведения единиц, основанных на воспроизводимых свойствах, имеющихся в природе веществ или тел. Так, единица длины метр в СИ — это единица длины, равная пути, проходимому в вакууме светом за 1/299792458 долю секунды.

К независимым единицам, определения которых базируются на воспроизводимых физических явлениях, относятся такие, как секунда и градус Кельвина.

Секунда определяется как единица времени, равная определенному количеству периодов излучения, соответствующего переходу между двумя уровнями основного состояния атома цезия — 133, а градус Кельвина определяется через температуру тройной точки воды, которой присвоено значение 273,16 °К.

К произвольно выбранным относят такие единицы, как кандела и ампер, так как в их определения входят величины, выраженные в других единицах.

Единицы измерений могут входить или не входить в систему единиц. В связи с этим единицы подразделяют на системные и внесистемные. Если, например, единица массы — тонна не входит в Международную систему единиц, но она тем не менее находит применение, так же как и единица мощности — лошадиная сила, единицы давления — миллиметр ртутного столба и атмосфера. Внесистемные единицы могут быть независимыми (например, единица плоского угла, оборот), однако чаще всего они являются

произвольно выбранными, но определяемые через системные единицы (например, единица длины — ангстрем, равная 10^{-10} м, единица мощности — лошадиная сила, равная 735,499 Вт, единица давления — миллиметр ртутного столба, равная 133,322 Н/м²).

К системным единицам относят основные и производные единицы данной системы. Основные единицы выбираются для основных величин той системы величин, для которой строится система единиц. Группа основных единиц определяет систему единиц, так как кроме того, что они служат для измерений основных величин, они также служат для образования производных единиц системы.

Производные единицы системы и сами системы единиц делятся на когерентные и некогерентные. Систему единиц называют когерентной (согласованной) по отношению к системе величин и уравнений между ними, если производные единицы образованы по уравнению между единицами, в которых числовые коэффициенты приняты равными единице. Если в уравнение между величинами подставить числовые значения, выраженные в когерентных единицах, то полученное уравнение между числовыми значениями по форме будет совпадать с уравнениями между величинами (т. е. содержит тот же числовой коэффициент). Например, уравнение для кинетической энергии тела массой m

$$E_к=\frac{m\cdot V^2}{2},$$

то уравнение между числовыми значениями энергии, массы, скорости будет иметь такую же форму только в случае, если они будут выражены в когерентных единицах, выбранных между единицами. $[V]=[l]\cdot[t]^{-1}$, а $[E]=[m]\cdot[V]^2=[l]^2[\mathrm{m}]\cdot[t]^{-2}$.

Когерентная система единиц представляет собой набор единиц, который содержит по одной единице для каждой величины. Очевидно, что эти единицы не могут быть одинаково удобными для выражения всех встречающихся размеров величин, так как при измерениях приходится иметь дело с величинами, чрезвычайно сильно отличающимися по своему размеру.

Так, масса Солнца на 60 порядков отличается от массы электрона (10^{60} раз).

Единицы, удобные в одной области науки, оказываются неудобными для другой. Отсюда возникает потребность в кратных и дольных единицах, легко образуемых из единиц системы. Кратные и дольные единицы образованы введением множителей, не равных единице, они не принадлежат к когерентным единицам системы. Кратные и дольные единицы всегда начинаются с приставки.

3.3. МЕЖДУНАРОДНАЯ СИСТЕМА ЕДИНИЦ (СИ)

В результате развития метрической системы мер возникла множественность единиц измерений, вошедших в употребление в науке и технике, ставшей препятствием для сопоставления результатов измерений данных о свойствах веществ и материалов, для выполнения технических расчетов, т. е. она стала препятствием для прогресса науки и техники. Так появилась потребность замены множественности применяемых единиц одной унифицированной системой единиц.

В 1954 г. X Генеральной конференцией по мерам и весам принято решение о применении в качестве основных единиц практической системы следующих единиц: длины — метр, массы — килограмм, времени — секунда, силы тока — ампер, термодинамической температуры — градус Кельвина, силы света — кандела (свеча).

В 1960 г. XI Генеральная конференция по мерам и весам приняла список двух дополнительных и 27 производных единиц и присвоила ей наименование «Международная система единиц». Сокращенное обозначение SI (СИ). На XIV Конференции была введена седьмая основная единица СИ — моль.

Внедрение Международной системы единиц в нашей стране осуществлялось в несколько этапов, а окончательно сформировалась СИ с 1 января 1982 г. С этого времени был внедрен ГОСТ 8.417—81 (СТ СЭВ 1052—78) «ГСИ. Единицы физических величин». Все другие системы с этого времени подлежали изъятию.

Основные достоинства СИ:

универсальность — охват всех областей науки и техники;

унификация единиц для всех областей и видов измерений (механических, тепловых, электрических, магнитных и т. д.), например, вместо ряда применявшихся ранее единиц работы и энергии (кгс·м, эрг, л.с·ч., кал, Вт·с, Дж и другие) в СИ предусмотрена одна системная единица джоуль (Дж), как единица работы, энергии, количества теплоты;

когерентность единиц — все производные единицы СИ получаются из уравнений связи между величинами, в которых коэффициенты равны единице;

возможность воспроизведения единиц с высокой точностью в соответствии с их определениями;

упрощение записи уравнений и формул в физике, химии, а также в технических расчетах в связи с отсутствием переводных коэффициентов;

уменьшение числа допускаемых единиц;

единая система образования кратных и дольных единиц, имеющих собственные наименования;

облегчение процесса обучения.

В настоящее время СИ состоит из 7 основных, 2 дополнительных, ряда производных. Наименования основных и дополнительных единиц СИ, их определения и обозначения приведены в табл. 3.1, 3.2.

Таблица 3.1

Основные единицы СИ

Единица измерения: Наименование	Обозначение: международное	Обозначение: русское	Определение	Обозначения рекомендуемых кратных и дольных единиц	Величина: Наименование	Величина: Размерность	Величина: Рекомендуемое обозначение
Метр	m	м	Расстояние, проходимое светом за 1/299792458 долей секунды (XVII ГКМВ, 1983)	км, см, мм мкм, нм	Длина	L	l
Килограмм	kg	кг	Масса международного прототипа килограмма (I ГКМВ, 1889, II ГКМВ, 1901)	мг, г, мг, мкг	Масса	M	m
Секунда	s	с	9 192 631 770 периодов излучения, соответствующих переходу между двумя сверхтонкими уровнями основного состояния атома цезия-133 (XIII ГКМВ, 1967, резолюция 1)	кс, мс, мкс, нс	Время	T	t
Ампер	A	А	Сила неизменяющегося тока, который при прохождении по двум параллельным проводникам бесконечной длины и ничтожно малой площади кругового поперечного сечения, расположенным в вакууме на расстоянии 1 м один от другого, вызвал бы на каждом участке проводника длиной 1 м силу взаимодействия, равную $20 \cdot 10^{-7}$Н (IX ГКМВ 1948, резолюция 2)	кА, мА, мкА, нА, пА	Сила электрического тока	I	I
Кельвин	K	К	1/273,16 часть термодинамической температуры тройной точки воды (XIII ГКМВ, 1967, резолюция 4)	МК, кК мК, мкК	Термодинамическая температура	Θ	T
Моль	mol	моль	Количество вещества системы, содержащей столько же структурных элементов, сколько содержится атомов в углероде 12 массой 0,0012 кг	кмоль, ммоль мкмоль	Количество вещества	N	n, ν

Продолжение

Единица измерения					Величина		
Наименование	Обозначение: международное	Обозначение: русское	Определение	Обозначения рекомендуемых кратных и дольных единиц	Наименование	Размерность	Рекомендуемое обозначение
Кандела	cd	кд	Сила света в заданном направлении источника, испускающего монохроматическое излучение частотой $540\cdot10^{12}$ Гц, энергетическая сила излучения которого в этом направлении составляет 1/683 Вт/ср (XVI ГКМВ, 1979, резолюция 3)		Сила света	J	J

Таблица 3.2

Дополнительные единицы СИ

Единица измерения					Величина	
Наименование	Обозначение: международное	Обозначение: русское	Определение	Обозначения рекомендуемых дольных единиц	Наименование	Размерность
Радиан	rad	рад	Угол между двумя радиусами окружности, длина дуги между которыми равна радиусу	мрад, мкрад	Плоский угол	—
Стерадиан	sr	ср	Телесный угол с вершиной в центре сферы, вырезающей на поверхности сферы площадь, равную площади квадрата со стороной, равной радиусу сферы		Телесный угол	—

Производные единицы СИ

Производные единицы СИ образуются из основных, дополнительных и ранее образованных производных единиц СИ при помощи уравнений связи между физическими величинами, в которых числовые коэффициенты равны единице. Для этого величины в правой и левой частях уравнения связи принимают равными единицам СИ. Например, для производной единицы скорости СИ, определяемой из уравнения $v=l\cdot t$ записывают уравнение единиц $[v]=[l]\cdot/[t]$, а вместо символов l и t подставляют их единицы (1 м или 1 с) и получают $[v]=1$ м/1 с$=1$ м/с. Это означает, что единицей скорости СИ является метр в секунду.

Производным единицам могут присваиваться наименования в честь известных ученых.

Так, уравнение связи между величинами для определения единицы давления $p=F/S$, уравнение связи между единицами давления, силы и площади $[p]=[F]/[S]$. Подставив вместо F и S единицы этих величин в СИ (1 Н и 1 м²), получим $[p]=1$ Н/1 м²$=1$ Н/м². Этой единице присвоено специальное наименование — паскаль (Па) по имени французского математика и физика Блеза Паскаля. Производные единицы, имеющие специальные названия, приведены в табл. 3.3.

Таблица 3.3

Производные единицы СИ, имеющие специальные наименования

Единица				Величина	
Наименование	Обозначение: международное	Обозначение: русское	Выражение через основные и дополнительные единицы СИ	Наименование	Размерность
Герц	Hz	Гц	s^{-1}	Частота	T^{-1}
Ньютон	N	Н	$m\cdot kg\cdot s^{-2}$	Сила, вес	LMT^{-2}
Паскаль	Pa	Па	$m^{-1}\cdot kg\cdot s^{-2}$	Давление, механическое напряжение, модуль упругости	$L^{-1}MT^{-2}$
Джоуль	I	Дж	$m^2\cdot kg\cdot s^{-2}$	Энергия, работа, количество теплоты	L^2MT^{-2}
Ватт	W	Вт	$m^2\cdot kg\cdot s^{-3}$	Мощность, поток энергии	L^2MT^{-3}
Кулон	C	Кл	$s\cdot A$	Количество электричества (электрический заряд)	TI
Вольт	V	В	$m^2\cdot kg\cdot s^{-3}\cdot A^{-1}$	Электрическое напряжение, электрический потенциал, разность электрических потенциалов, электродвижущая сила	$L^2MT^{-3}I^{-1}$
Фарад	F	Ф	$m^{-2}kg^{-1}s^4A^2$	Электрическая емкость	$L^{-2}M^{-1}T^4I^2$
Ом	Ω	Ом	$m^2kgs^{-3}A^{-2}$	Электрическое сопротивление	$L^2MT^{-3}I^{-2}$
Сименс	S	См	$m^{-2}kg^{-1}s^3A^2$	Электрическая проводимость	$L^{-2}M^{-1}T^3I^2$
Вебер	Wb	Вб	$m\cdot kg\cdot s^{-2}A^{-1}$	Поток магнитной индукции, магнитный поток	$L^2MT^2I^{-1}$
Тесла	T	Тл	$kg\cdot s^{-2}\cdot A^{-1}$	Плоскость магнитного потока, магнитная индукция	$MT^{-2}I^{-1}$
Генри	H	Гн	$m^2kg\cdot s^{-2}\cdot A^{-2}$	Индуктивность, взаимная индуктивность	$L^2MT^{-2}I^{-2}$
Люмен	lm	лм	$cd\cdot sr$	Световой поток	J
Люкс	lx	лк	$m^{-2}\cdot cd\cdot sr$	Освещенность	$L^{-2}J$
Беккерель	Bq	Бк	s^{-1}	Активность нуклида в радиоактивном источнике (активность радионуклида)	T^{-1}
Грей	Gy	Гр	$m^2\cdot s^{-2}$	Поглощенная доза излучения, керма	L^2T^{-2}
Зиверт	Sv	Зв	$m^2\cdot s^{-2}$	Эквивалентная доза излучения	L^2T^{-2}

Кратные и дольные единицы

На XI Генеральной конференции по мерам и весам вместе с принятием СИ были приняты 12 кратных и дольных приставок, к которым на последующих конференциях были добавлены новые.

Приставки дали возможность образовывать десятичные кратные и дольные единицы от единиц СИ. Наименование и обозначения приставок приведены в табл. 3.4.

Таблица 3.4

Наименования и обозначения приставок СИ для образования десятичных кратных и дольных единиц и их множители

Приставка				Примеры
Наименование	Обозначение		Множитель	
	между-народное	русское		
Экса	E	Э	10^{18}	Эксабеккерель — ЭБк
Пета	P	П	10^{15}	Петаджоуль — ПДж
Тера	T	Т	10^{12}	Терагерц — ТГц
Гига	G	Г	10^{9}	Гигаватт — ГВт
Мега	M	М	10^{6}	Мегаом — МОм
Кило	k	к	10^{3}	Километр — км
Гекто	h	г	10^{2}	Гектолитр — гл
Дека	da	да	10^{1}	Декалитр — дал
Деци	d	д	10^{-1}	Дециметр — дм
Санти	c	с	10^{-2}	Сантиметр — см
Милли	m	м	10^{-3}	Милливольт — мВ
Микро	μ	мк	10^{-6}	Микроампер — мкА
Нано	n	н	10^{-9}	Наносекунда — нс
Пико	p	п	10^{-12}	Пикофарад — пФ
Фемто	f	ф	10^{-15}	Фемтокулон — фКл
Атто	a	а	10^{-18}	Аттограмм — аг

Правила образования кратных и дольных единиц

1. Присоединение подряд двух или более приставок к исходной единице не допускается

Неправильно	*Правильно*
микрокилограмм	миллиграмм

2. Приставку или ее обозначение пишут слитно с наименованием единицы или с ее обозначением

Неправильно	*Правильно*
деци-метр	дециметр

3. К единице, образованной произведением или отношением единиц, присоединяют приставку по наименованию первой единицы. Например, для единицы — паскаль-секунда на метр (Па с/м)

Неправильно	*Правильно*
паскаль-килосекунда на метр (Па кс/м)	килопаскаль-секунда на метр (кПа с/м)

Для ряда единиц, имеющих широкое применение, приставка может применяться во втором сомножителе. Например, ватт на квадратный сантиметр (Вт/см²).

4. Если единицы возведены в степень, то приставку присоединяют к наименованию исходной единицы. Например, приставку «кило» для единицы объема (кубический метр) присоединяют к слову метр, в результате образуется кратная единица — кубический километр.

5. Выбор десятичной кратной или дольной единицы диктуется удобством ее применения. Обычно выбирают ту единицу, которая приводит к числовым значениям, приемлемым на практике. Обычно их выбирают таким образом, чтобы числовое значение измеряемой величины было в диапазоне от 0,1 до 1000.

6. В случае, когда наименование производной единицы представляет собой произведение единиц, то оно записывается через дефис, до и после которого не оставляется пробел — ньютон-метр (Нм) и др. Если же в наименовании производной содержится отношение единиц, то используется предлог «на» — ампер на метр (А/м) и др. Исключение составляют единицы, характеризующие явления во времени. Для них используется предлог «в» — метр в секунду (м/с) и др.

7. При склонении сложных наименований, представляющих собой произведение единиц, склоняется только последнее наименование и относящееся к нему прилагательное «квадратный», «кубический», например, магнитный момент равен пяти ампер-квадратным метрам. При склонении наименований, представляющих собой отношение единиц, склоняется только числитель, например, теплопроводность равна — 10 ваттам на метр-кельвин и др.

8. В наименованиях единиц площади и объема применяются прилагательные «квадратный» и «кубический» — квадратный метр ($м^2$) и др. Эти же прилагательные применяются в случаях, когда единица площади или объема входит в производную единицу другой величины — кубический метр в секунду ($м^3/с$) и др. Если же вторая и третья степени длины не представляют собой площади или объема, то в наименовании единицы применяются выражения «в квадрате» или «во второй степени», «в кубе» или «в третьей степени» — килограмм-метр в квадрате ($кг \cdot м^2$) и др.

9. Международные и русские обозначения относительных и логарифмических единиц: процент (%), промилле (‰), миллионная доля (ppm, $млн^{-1}$), бел (B, Б), децибел (dB, дБ), октава (—, окт), декада (—, дек), фон (phon, фон).

10. К обозначениям единиц и их наименованиям нельзя добавлять буквы (слова), указывающие на физическую величину или на объект. Например, п. м. или мп (погонный метр), укм (условный квадратный метр), экм (эквивалентный квадратный метр), $нм^3$ или $Нм^3$ (нормальный кубический метр), тут (тонна условного топлива), % весовой (весовой процент). Во всех таких

случаях определяющие слова следует присоединять к наименованию величины, а единицу обозначать в соответствии со стандартом. Например, погонная длина 10 м, эквивалентная площадь 40 м², объем газа (приведенный к нормальным условиям) 300 м³, масса топлива (условного) 7000 т, массовая доля 30 %, объемная доля 5 % и т. д.

Обозначения единиц, названных в честь ученых, пишут с прописной буквы (А, К, Ф и др.)

Буквенные обозначения единиц печатаются прямым шрифтом. В обозначениях единиц точка в качестве знака сокращения не ставится. Однако если сокращается слово, входящее в наименование единицы, то точка ставится. Например, мм рт. ст. Буквенные обозначения единиц, входящих в произведение, отделяются точками на средней линии как знаками умножения, однако это не касается машинописных текстов. Нельзя при указании производной единицы, состоящей из двух и более единиц, для одних приводить обозначения, а для других наименования. Вместе с тем в обоснованных случаях допускается использовать сочетания специальных знаков с буквенными обозначениями единиц.

11. Если в числовом значении величины встречается десятичная дробь, обозначение единицы ставится после всех цифр. Если указаны значения величины с допусками (предельными отклонениями), следует заключить числовые значения в скобки и обозначения единиц помещать после скобок или проставлять обозначения единиц после числового значения величины и после ее предельного отклонения.

Правильно	*Неправильно*
(100,0±0,1) кг	100,0±0,1 кг
50 г±1 г	50±1 г

Если в тексте приводят подряд несколько числовых значений какой-нибудь физической величины, выраженных одной и той же единицей, эту единицу можно указывать только после последней цифры.

12. В случае, когда производные единицы образованы путем деления одних на другие, то в их обозначениях должна применяться косая черта, при этом сами обозначения помещаются в строку. При использовании косой черты обозначения произведения единиц в знаменателе должны быть заключены в скобки. Допускается обозначение единицы в форме произведения обозначений единиц, возведенных в положительные и отрицательные степени, а также с помощью пробной черты. Нельзя при обозначении сложных производных единиц применять более одной косой или горизонтальной черты. Обозначения единиц, совпадающие с наименованиями этих единиц, по падежам и числам изменять не следует, если они помещены после числовых значений, а также в заголовках граф, боковиков таблиц и выводах, в пояснениях обозначений величин к формулам. К таким обозначениям относятся: бар, бер, вар, моль, рад. Следует писать: 1 моль, 2 моль, 5 моль и т. д. Исключение составляет обозначение: «св. год», которое изменяется следующим образом: 1 св. год, 2, 3, 4 св. года, 5 св. лет.

13. При образовании и обозначении кратных и дольных единиц следует помнить, что если физическая величина имеет наименование из одного слова, то приставка пишется слитно с наименованием. Нельзя применять две и более приставок.

Правильно	*Неправильно*
ГДж	МкДж

В связи с тем, что наименование основной единицы массы-килограмм — содержит приставку «кило», для образования кратных и дольных единиц массы используют дольную единицу — грамм.

Правильно	*Неправильно*
мг	мккг

В случае, когда единица образована как произведение или отношение единиц, приставку следует присоединить к наименованию первой единицы, входящей в произведение или отношение.

Правильно	*Неправильно*
кПа с/м	Па кс/м

Приставку можно применять во втором множителе или знаменателе в обоснованном случае, когда имеется широкое распространение таких единиц. Например, Вт/см², А/мм².

14. Наименования кратных и дольных единиц от единицы, возведенной в степень, следует образовывать путем присоединения приставки к наименованию исходной единицы. Обозначения кратных и дольных единиц от единицы, возведенной в степень, следует образовывать добавлением соответствующего показателя степени к обозначению кратной или дольной этой единицы, причем, показатель обозначает возведение в степень кратной или дольной единицы вместе с приставкой. Например, $0{,}02\ см^{-1} = 0{,}02\,(10^{-2}\ м) = 0{,}02 \cdot 100\ м^{-1} = 2\ м^{-1}$.

3.4. ВНЕСИСТЕМНЫЕ ЕДИНИЦЫ, ДОПУСКАЕМЫЕ К ПРИМЕНЕНИЮ НАРАВНЕ С ЕДИНИЦАМИ СИ

Система единиц и сами единицы складывались веками, образовывались определенные традиции и привычки. Так, до недавнего времени урожайность в нашей стране определялась в миллионах пудов, в США используют единицу массы фунт, единицу длины — милю и т. д.

В то же время эти и другие единицы не входят в СИ, и тем не менее они используются в науке и технике, в быту.

Внесистемные единицы, допускаемые к применению наравне с единицами СИ, соответствуют 10 физическим величинам. Для некоторых величин имеется несколько единиц, поэтому общее число достигает 18.

2 Зак. 2625

Внесистемные единицы подразделяются на два вида:

единицы, получившие распространение наравне с единицами СИ и в сочетании с ними (см. табл. 3.5);

единицы, применяемые в специальных областях науки и техники (см. табл. 3.6).

Таблица 3.5

Внесистемные единицы, допускаемые к применению наравне с единицами СИ и в сочетании с ними

Наименование	Единица. Обозначение: международное	Единица. Обозначение: русское	Соотношение с единицей СИ	Наименование величины	Примечание
Тонна	t	т	10^3 кг	Масса	
Минута	min	мин	60 с	Время	Допускается применение единиц: неделя, год, век, тысячелетие и др.
Час	h	ч	3600 с		
Сутки	d	сут	86400 с		
Градус	...°	...°	$(\pi/180)$ рад $= 1{,}745329... \cdot 10^{-2}$ рад	Плоский угол	
Минута	...′	...′	$(\pi/10800)$ рад $= 2{,}908882... \cdot 10^{-4}$ рад		
Секунда	...″	...″	$(\pi/648000)$ рад $= 4{,}848137... \cdot 10^{-6}$ рад		
Литр	l	л	10^{-3} м^3	Объем, вместимость	Не рекомендуется применять при точных измерениях.
Градус Цельсия	...°C	...°C	1° C = 273,16 K	Температура	По размеру градус Цельсия равен Кельвину

Примечание. Не допускается применение с приставками единиц времени (минута, час, сутки) и плоского угла (радиус, минута, секунда).

3.5. ВНЕСИСТЕМНЫЕ ЕДИНИЦЫ, ВРЕМЕННО ДОПУСКАЕМЫЕ К ПРИМЕНЕНИЮ

Внесистемные единицы, временно допускаемые к применению, подлежат постепенному изъятию в соответствии с решениями международных организаций в том или ином виде деятельности. Например, традиционно использующаяся единица длины — миля и единица скорости — узел применяются в морской навигации всех стран. Морские карты, приборы выпускаются и используются с учетом этих единиц. Переход на единицы СИ возможен лишь в будущем. Внесистемные единицы, временно допускаемые к применению, приведены в табл. 3.7.

Таблица 3.6

Внесистемные единицы, допускаемые к применению наравне с единицами СИ в специальных областях науки и техники

Наименование	Единица. Обозначение: международное	Единица. Обозначение: русское	Соотношение с единицей СИ	Наименование величины	Область применения
Астрономическая единица	ua	а. е.	$1{,}49598 \cdot 10^{11}$ м (приблизительно)	Длина	Астрономия
Световой год	ly	св. год	$9{,}4605 \cdot 10^{15}$ м (приблизительно)		
Парсек	pc	пк	$3{,}0857 \cdot 10^{16}$ м (приблизительно)		
Диоптрия	—	дптр	1 м$^{-1}$	Оптическая сила	Оптика
Гектар	ha	га	10^4 м^2	Площадь	Сельское и лесное хозяйство
Атомная единица массы	u	а.е.м.	$1{,}66057 \cdot 10^{-27}$ (приблизительно)	Масса	Атомная физика
Град или гон	...g	град	(/200) рад	Плоский угол	Геодезия
Электрон-вольт	eV	эВ	$1{,}60219 \cdot 10^{-19}$ (приблизительно)	Энергия	Физика
Вольт-ампер	V·A	ВА		Полная мощность	Электротехника
Вар	var	вар		Реактивная мощность	

Примечание. Не допускается применение с приставками следующих единиц: астрономическая, световой год, диоптрия, атомная единица массы.

Таблица 3.7

Внесистемные единицы, временно допускаемые к применению (до решения международных организаций об их изъятии)

Наименование	Единица. Обозначение: международное	Единица. Обозначение: русское	Соотношение с единицей СИ	Наименование величины	Область применения
Морская миля	n mile	миля	1852 м (точно)	Длина	В морской навигации
Карат	—	кар	$2 \cdot 10^{-4}$ (точно)	Масса	При взвешивании драгоценных камней и жемчуга
Текс	tex	текс	10^{-6} кг/м (точно)	Линейная плотность	В текстильной промышленности
Узел	kn	уз	0,514(4) м/с	Скорость	В морской навигации
Оборот в секунду	r/c	об/с	1 с$^{-1}$	Частота вращения	
Оборот в минуту	r/min	об/мин	$1/60$ с$^{-1}$ $= 0{,}016(6)$ с$^{-1}$		

Единица				Наименование величины	Область применения
Наименование	Обозначение		Соотношение с единицей СИ		
	международное	русское			
Бар	bar	бар	10^5 Па	Давление	
Непер	Np	Нп		Натуральный логарифм безразмерного отношения физической величины, принимаемой за исходную	

Вопросы для самопроверки

1. Чем была вызвана разработка метрической системы мер?
2. Каковы были первоначальные определения метра и килограмма?
3. Какие единицы входили первоначально в метрическую систему мер?
4. Какие величины условно приняты безразмерными и равными единице в системах СГСЕ, СГСМ и симметричной СГС?
5. Какие единицы являются основными в системе единиц МКСА?
6. Какие системы единиц, вошедшие в качестве частей Международной системы единиц, вошли в наши стандарты на единицы измерений в области тепловых, акустических и световых величин?
7. В чем заключается различие размерных и безразмерных единиц измерений, независимых и произвольно выбранных единиц?
8. Каково различие понятий размерность и размер единиц?
9. Назовите примеры системных и внесистемных единиц. На какие разновидности делятся системные единицы?
10. Дайте определения кратных и дольных единиц. Приведите примеры.
11. Что следует понимать под шкалой единиц?
12. Какие единицы и системы единиц называются когерентными?
13. Входят ли кратные и дольные единицы в когерентную систему единиц?
14. Цели разработки Международной системы единиц.
15. Какие приняты определения основных и дополнительных единиц Международной системы?

ЗАДАЧИ И ПРИМЕРЫ К РАЗД. 3

1. Автомобиль движется по городу со скоростью 60 км/ч. После выключения двигателя и торможения автомобиль останавливается через 2 с. Определить силу торможения, если масса автомобиля 1,2 т.

Решение. Сила определяется по формуле $Ft=m\cdot v$, где F — сила, m — масса, t — время, v — скорость. Переводим все величины в единицы СИ: $m=1{,}2$ т$=1200$ кг; $v=60$ км/ч$=16{,}66$ м/с. Находим значение силы торможения

$$F=\frac{1200\cdot 16{,}66}{2}=9996\ \text{Н}\approx 10\ \text{кН}.$$

2. Определить маховой и динамический моменты инерции для вращающейся массы 0,6 т при диаметре инерции 180 см.

Решение. Маховой момент равен mD^2, динамический момент инерции $I=mr^2$. Переводим величины в единицы СИ: $m=0{,}6$ т$=600$ кг, $D=180$ см$=1{,}8$ м.

Маховой момент $600\cdot 1{,}8^2=1944$ кг·м².

Динамический момент инерции $I=600\cdot 0{,}9^2=486$ кг·м².

3. Определить мощность электродвигателя, если от насоса, подающего воду из скважины глубиной 3 км, требуется подача 45000 л воды в 1 ч. КПД насоса 74,5 %.

Решение. Гидравлическая мощность насоса $P=\frac{Vp}{t}$; давление, развиваемое насосом, $p=h\cdot\rho\cdot g$. Переводим все величины в единицы СИ: $h=3$ км$=3000$ м; $V=45000$ л$=45$ м³; $t=1$ ч$=3600$ с; $g=1000$ кг/м³. Находим давление, развиваемое насосом,

$$p=3000\cdot 1000\cdot 9{,}8=29{,}4\cdot 10^6\ \text{Па}.$$

Гидравлическая мощность насоса

$$P=\frac{45\cdot 29{,}4\cdot 10^6}{3600}=410\cdot 10^3\ \text{Вт}=410\ \text{кВт}.$$

Мощность электромотора

$$P=410\cdot\frac{100}{74{,}5}=550\ \text{кВт}.$$

4. Какую мощность должен развивать мотор самолета для обеспечения его подъема на высоту 1 км на широте 45° при массе самолета 3 т и времени подъема 1 мин.

Ответ: $P=490$ кВт.

5. Определить стрелу прогиба и максимальное нормальное напряжение, возникающее в деревянной (сосновой) балке прямоугольного поперечного сечения, защемленной одним концом, если на свободном конце действует сила 0,3 тс, а пролет и размеры поперечного сечения соответственно равны 1,5 м; 6 см (ширина); 20 см (высота).

Решение. Стрела прогиба консоли $f=\frac{Fl^3}{3E\cdot I}$. Переведем значения входящих в эту формулу величин в единицы СИ: $F=0{,}3$ тс$\cong 2942$ Н; $l=1{,}5$ м; модуль упругости для сосны

$$E=10^5\ \text{кгс/см}^2=\frac{10^5\cdot 9{,}8365}{10^{-4}}=981\cdot 10^7\ \text{Па},$$

$b=6$ см$=0{,}06$ м; $h=20$ см$=0{,}2$ м.

$I=\frac{b\cdot h^3}{12}$ — центральный осевой момент инерции поперечного прямоугольного сечения:

$$I=\frac{0{,}06\cdot 0{,}2^3}{12}=4\cdot 10^{-5}\ \text{м}^4.$$

Подставляя в формулу для f:

$$f=\frac{2942\cdot 1{,}5^3}{3\cdot 981\cdot 10^7\cdot 4\cdot 10^{-5}}=0{,}0084\ \text{м}.$$

Максимальное нормальное напряжение определяется формулой

$$\sigma_{max}=\frac{M_{max}}{W},$$

где $M_{max}=Rl$ — изгибающий момент в заделке консоли;

$$M_{max}=2942\cdot 1{,}5=4{,}413\ \text{Нм};$$

$W=\frac{bh^2}{6}$ — осевой момент сопротивления прямоугольного сечения;

$$W=\frac{0{,}06\cdot 0{,}2^2}{6}=0{,}0004\ \text{м}^3.$$

Подставляем

$$\sigma_{max}=\frac{4413}{0,0004}=110,3\cdot10^5 \text{ Па}=11 \text{ МПа}.$$

6. Определить количество теплоты для нагревания медного паяльника массой 200 г от 20 до 300 °С. Удельная теплоемкость меди 0,091 кал/(г° С).

Решение. Количество теплоты находим по формуле

$$Q=cm(t_2-t_1).$$

Переводим все величины в единицы СИ: $m=200$ г$=0,2$ кг; $c=0,091$ кал/(г° С)$=380$ Дж/(кг·К). Определяем количество теплоты, необходимое для нагревания паяльника;

$$Q=380\cdot0,2\cdot280=21280 \text{ Дж}=21,28 \text{ кДж}.$$

7. Идеальная тепловая машина работает по циклу Карно. Определить КПД цикла, если за один цикл была произведена работа A, равная 300 кгс·м, и холодильнику передано количество тепла Q, равное 3,2 ккал.

Ответ: $\eta=0,18$.

8. Определить теплопроводность материала стенки, если количество тепла, проходящего через стенку площадью 1 м и толщиной 18 см за 1 ч, равно 125,6 ккал при температуре наружной поверхности — 5 °С, а внутренней 25 °С.

Решение. Для этого воспользуемся уравнением Фурье

$$Q=\lambda\frac{\Delta T}{l}S\cdot\tau,$$

где λ — теплопроводность материала; S — площадь стенки; ΔT — разность температур между наружной и внутренней поверхностями; l — толщина стенки; τ — время, в течение которого идет теплопередача. Из этой формулы

$$\lambda=\frac{Ql}{\Delta T\cdot S\tau}.$$

Переведем входящие в эту формулу величины в единицы СИ: $Q=125,6$ ккал$=526\cdot10^3$ Дж; $l=18$ см$=0,18$ м; $\Delta T=25-(-5)=30$ К; $S=1$ м^2; $\tau=1$ ч$=3600$ с. Подставляем

$$\lambda=\frac{526000\cdot0,18}{30\cdot1\cdot3600}=0,88 \text{ Вт/мК}.$$

9. Найти расход бензина в двигателе автомобиля на 100 км пути при средней скорости 30 км/ч, если средняя мощность двигателя 15 л. с., а его КПД 22 %. Теплота сгорания бензина $11\cdot10^3$ ккал/кг.

Решение. Количество израсходованного топлива найдем по формуле

$$m=\frac{A\cdot100}{q\eta}=\frac{P\cdot l\cdot100}{qv\eta},$$

где A — работа, выполненная двигателем автомобиля; q — удельная теплота сгорания топлива; P — мощность; l — пройденное расстояние; v — скорость; η — КПД. Переведем все величины в единицы СИ: $l=100$ км$=1\cdot10^5$ м; $v=30$ км/ч$=8,33$ м/с; $P=15$ л. с.$=11032$ Вт; $q=46\cdot10^6$ Дж/кг. Находим количество израсходованного бензина

$$m=\frac{11032\cdot10^5\cdot100}{46\cdot10^6\cdot8,33\cdot22}=13 \text{ кг}.$$

10. Определить электрическую емкость и заряд кабеля, радиус центральной жилы которого равен 1,5 см, радиус оболочки 3,0 см, относительная диэлектрическая проницаемость материала изоляции $\varepsilon=3,6$, а разность потенциалов между центральной жилой и оболочкой 2,5 кВ.

Решение. Емкость кабеля определяем по формуле

$$C=\frac{2\pi\varepsilon_0\varepsilon L}{\ln\frac{R}{r}},$$

где L — длина кабеля; R — радиус оболочки; r — радиус центральной жилы; ε — относительная диэлектрическая проницаемость материала изоляции; ε_0 — электрическая постоянная (абсолютная диэлектрическая проницаемость вакуума). Переведем данные примера в единицы СИ: $R=3$ см$=0,03$ м; $r=1,5$ см$=0,015$ м; $\varepsilon=3,6$;

$$\varepsilon_0=\frac{1}{4\pi c^2}\cdot10^7 \text{ Ф/м}=8,85\cdot10^{-12} \text{ Ф/м}.$$

Подсчитаем емкость единицы длины кабеля

$$\frac{C}{L}=\frac{2\pi\varepsilon_0\varepsilon}{\ln\frac{R}{r}}=\frac{2\cdot3,14\cdot8,85\cdot10^{-12}\cdot3,6}{2,3\cdot\lg2}=287\cdot10^{-12} \text{ Ф/м}.$$

Найдем теперь заряд, приходящийся также на единицу длины кабеля. Для этого воспользуемся формулой $C=\frac{qL}{U}$, откуда $q=\frac{C}{L}U$,

где q — электрический заряд, приходящийся на единицу длины кабеля; U — разность потенциалов между центральной жилой и оболочкой, которая в СИ равна $U=2,5$ кВ$=2,5\cdot10^3$ В. Подставляем значения:

$$q=287,5\cdot10^{-12}\cdot2,5\cdot10^3=619\cdot10^{-9} \text{ Кл/м}.$$

11. Найти падение напряжения на медном проводе длиной 1 км, диаметром 4 мм, если сила тока в нем 5 А. Удельное сопротивление меди $\rho=1,7\cdot10^{-2}$ Ом·мм^2/м.

Ответ: $U=6,75$ В.

12. Найти относительную магнитную проницаемость μ железного сердечника соленоида, если площадь поперечного сечения последнего 12 см^2; число витков на каждый метр длины $n=400$ м$^{-1}$; ток, проходящий через соленоид, 6 А; магнитный поток, пронизывающий соленоид с сердечником $2\cdot10^3$ Вб.

Решение. Относительная магнитная проницаемость сердечника определяется из формулы

$$\Phi=\mu_0\mu HS, \qquad (a)$$

где μ_0 — магнитная постоянная и в единицах СИ

$$\mu_0=4\pi\cdot10^{-7} \text{ Гн/м}=12,57\cdot10^{-7} \text{ Гн/м};$$

H — напряженность магнитного поля внутри соленоида

$$H=I\cdot n=6\cdot400=2400 \text{ А/м}.$$

Из формулы (а) находим

$$\mu=\frac{\Phi}{\mu_0 HS}.$$

Переведем данные задачи в единицы СИ: $S=12$ см$=12\cdot10^{-4}$ м. Подставляем:

$$\mu=\frac{2\cdot10^{-3}}{12,57\cdot10^{-7}\cdot2400\cdot12\cdot10^{-4}}=552.$$

13. Определить напряженность магнитного поля внутри соленоида длиной 80 см и числом витков 800 при силе тока в нем 5 А. Чему будет равна магнитная индукция при помещении в соленоид железного сердечника с относительной магнитной проницаемостью 457?

Решение. Напряженность магнитного поля внутри соленоида

$$H=\frac{nI}{l}=\frac{800\cdot 6}{0{,}8}=6000\ \text{А/м}.$$

Магнитная индукция $B=\mu_a H=\mu\mu_0 H=457\cdot 1{,}257\cdot 10^{-6}\cdot 6000=3{,}44$ Тл. (μ_0 — магнитная постоянная, равная $1{,}257\cdot 10^{-6}$ Гн/м).

14. Определить индуктивность электромагнита и электродвижущую силу, возникающую при размыкании тока, если магнитная индукция равна 3,2 Тл, время размыкания 0,001 с, площадь поперечного сечения электромагнита 60 см², длина сердечника 180 см, числов витков 2000 и относительная магнитная проницаемость железа 457.

Решение. Индуктивность электромагнита определяется по формуле

$$L=\mu_a\cdot n_0^2\cdot l\cdot S,$$

где $\mu_a=\mu\mu_0=457\cdot 1{,}257\cdot 10^{-6}$ Гн/м; n_0 — число витков на единицу длины, равное $\frac{2000}{1{,}8}\approx 1110$ м. Находим индуктивность электромагнита

$$L=457\cdot 1{,}257\cdot 10^{-6}\cdot 1\cdot 110^2\cdot 1{,}8\cdot 6\cdot 10^{-3}\approx 7{,}65\ \text{Гн}.$$

Электродвижущая сила самоиндукции при размыкании тока

$$E=-\frac{nBS}{t}=-2000\,\frac{3{,}2\cdot 6\cdot 10^{-3}}{0{,}001}=-38400\ \text{В}=-38{,}4\ \text{кВ}.$$

15. Результат измерения плоского угла 21°7′22″, а его погрешность от минус 12″ до плюс 12″ с вероятностью 0,95. Выразить результат измерения и доверительные границы его погрешности в единицах СИ.

Решение. Вначале целесообразно пересчитать значение погрешности, чтобы определить разряд, в котором везде надо сохранять значащие цифры. В соответствии с ГОСТ 8.011—72 значащих цифр численных показателей точности измерений должно быть не более двух. Используя соотношение секунды с радианом: $1''=4{,}848137\cdot 10^{-6}$ рад $=4{,}84\cdot 10^{-6}$ рад, выражаем погрешность в радианах: $12''=12\cdot 4{,}84\cdot 10^{-6}=5{,}8\cdot 10^{-5}$ рад. Выразим результат измерения в градусах плоского угла: $21°7'22''=21+7/60+22/60\cdot 60=21{,}1227778°$ (в промежуточных данных удерживается на один разряд больше). Используя соотношение градуса с радианом $1=0{,}01745329=0{,}0174533$ рад, выражаем результат в радианах: $21{,}1227778\cdot 0{,}0174533=0{,}368662$ рад (наименьшие разряды результата измерений и показателей точности должны быть одинаковы). Окончательно можно записать: $(0{,}368662\pm 0{,}000058)$ рад.

16. Модуль продольной упругости легированных сталей, согласно справочным данным, не менее $19{,}5\cdot 10^3$ и не более $21{,}2\cdot 10^3$ кгс/мм. Выразить граничные значения модуля упругости в единицах СИ.

Ответ: от 191,23 до 207,90 ГПа.

17. По справочным данным плотность латуни (60 % Cu, 40 % Zn) равна 8,14 г/см³. Выразить плотность латуни в единицах СИ.

Ответ: $8{,}14\cdot 10^3$ кг/м³.

18. Погрешность мембранного преобразователя давления типа БВ-1188 не более 5 мм вод. ст. Выразить погрешность в единицах СИ.

Ответ: 49 Па ≈ 0,5 ГПа

19. Выразить в единицах СИ удельную электрическую проводимость алюминия при температуре 100 °C, равную (25,9±0,1) 100^{-1} $м^{-1}\cdot см^{-1}$.

Ответ: $(0{,}259\pm 0{,}001)$ с/м.

20. Записать правильно и обосновать необходимые исправления в следующих записях, сделанных при метрологической экспертизе: 2,6 $кг\cdot с^{-2}/м$; 2,56 Нм; 0,1 мкм, 0,5 мкм или 0,8 мкм; 77±1 мм; 20 м; 1 рад/с; дал; от —0,1 Н до +0,2 Н; 5 кг/с²·м.

Ответ: 2,6 кг $с^{-2}м^{-1}$; ошибки нет; 0,1; 0,5 или 0,8 мкм: (77±1) мм; 0,02″ (при обозначениях в виде знака, поднятого над строкой, дольные и кратные приставки не применяют); ошибки нет; дал (обозначения дольных и кратных приставок пишутся слитно с обозначениями единиц); от —0,1 до +0,2 Н; 5 кг/(с²·м),

21. Записать правильно, обосновав исправления ошибочных записей: 28,1 $м^{-2}$кд·ср; 120±3 Па; от —5 К до +5 К; 6,02 Кл·м; 2 м моль; 3 I м²·кг/с²; 0,5 ммин; ньютон метр; 20 °C; 4 кг м/с³/К.

Ответ: ошибки нет; (120±3) Па; от —5 до +5 К; ошибки нет; 2 ммоль; ошибки нет; 0,03″; ньютон-метр; 20 °C; 4 м·кг/(с³К).

22. По справочным данным динамическая вязкость бензола при температуре 20 °C равна $0{,}49\cdot 10^{-3}$ мм рт. ст. Выразить вязкость бензола в единицах СИ.

Ответ: 0,065 Па·с.

23. Скорость автомобиля 20,9 м/с. Каким должно быть показание спидометра, градуированного в километрах в час?

Ответ: 75,2 км/ч.

24. Угловая скорость вала турбины 380 рад/с. Найти частоту вращения вала в оборотах в минуту.

Ответ: 3630 об/мин.

25. При испытаниях автомобиля ВАЗ 21061 в заданном режиме установлено, что мощность его двигателя 56,64 кВт. Выразить мощность двигателя в лошадиных силах.

Ответ: 76,96 л. с.

26. При измерении массового расхода нефти показание поплавкого расходомера типа РП составило 18 кг/с. Выразить массовый расход нефти в тоннах в часах.

Ответ: 65 т/ч

27. Для производственных целей израсходовано 6,741 ГДж электрической энергии. Выразить расход электрической энергии в киловатт-часах.

Ответ: 1873 кВт·ч.

28. По данным контрольных измерений плотность раствора серной кислоты составляет 1250 кг/м³. Каким должно быть показание ареометра, градуированного в граммах на кубический сантиметр?

Ответ: 1,250 г/см³.

29. При контроле конструкторского документа отмечены следующие записи, вызвавшие сомнения нормоконтролера: 220В; 18°27′; 28″8; 57±2 К; 118 Н±3Н; при напряжении 110 В, 127 В, и 220 В; от —5 мм до +8 мм; 3 сА; 2 м²·кг/с/А; 8,6 кг/м·с; 3,1 м·кг·$К^{-1}$/с³; квадратный метр в секунду (единица кинематической вязкости). Записать приведенные единицы правильно и обосновать исправления.

Решение. 220 В (необходим пробел); 18°27′ — ошибки нет; 28,8″ (единица обозначается после всех цифр), (57±2) К (один из возможных способов); 118 Н±3Н — ошибки нет (второй способ); 110; 127; 220 В (при приведении группы числовых значений единица указывается только в конце); от —5 до 8 мм (при указании интервала числовых значений единицу приводят только после последней цифры); 3 с·А (единицы, входящие в произведение, отделяют знаком умножения); 2 м²·кг/(с³·А) (должна быть только одна косая или горизонтальная черта); 8,6 кг/(м·с) (при применении косой черты произведение обозначений единиц в знаменателе следует заключать в скобки); 3,1 м·кг·$К^{-1}$·$с^{-3}$ (если одна из единиц имеет отрицательную степень, косая или горизонтальная черта не применяется); квадратный метр на секунду (предлог «в» используется только для единиц, характеризующих скорость протекания процесса).

4. ПОГРЕШНОСТИ ИЗМЕРЕНИЙ

4.1. АБСОЛЮТНЫЕ, ОТНОСИТЕЛЬНЫЕ, СИСТЕМАТИЧЕСКИЕ, СЛУЧАЙНЫЕ ПОГРЕШНОСТИ

Любой результат измерений содержит погрешность из-за наличия погрешностей, присущих самому средству измерений, выбранным методу и методике измерений, из-за влияния внешних условий и других причин, вызывающих погрешности. Погрешность вычисляется или оценивается, или приписывается полученному результату.

Погрешность результата измерения — это отклонение результата измерения от истинного значения измеряемой величины.

Истинное значение величины остается неизвестным в связи с наличием погрешностей. Оно обычно используется в теоретических вопросах метрологии. На практике обычно используется действительное значение величины, которое заменяет истинное значение.

Погрешность находят по формуле

$$\Delta x_{ист}=x_{изм}-X, \tag{4.1}$$

где $\Delta x_{ист}$ — погрешность измерения; $x_{изм}$ — значение величины полученное в результате измерения; X — истинное значение величины.

Или

$$\Delta x_{д}=x_{изм}-x_{действ}, \tag{4.2}$$

где $x_{действ}$ — значение величины, принятое за действительное.

Истинное значение величины познается только в результате бесконечно большого числа измерений с бесконечным совершенствованием методов и средств измерений, т. е. $\Delta x_{д}\to 0$, при $n\to\infty$, где n — число измерений.

Одно из возможных соотношений истинной и действительной погрешностей $|\Delta x|=|\Delta x_{д}|-|\Delta x_{ист}|$ показано на рис. 4.1

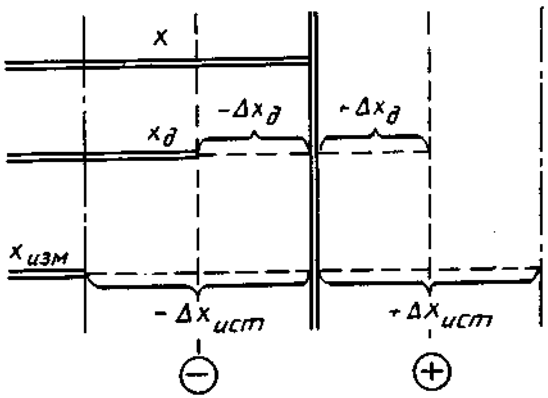

Рис. 4.1

Необходимо учитывать, что может быть

$$x_{изм}\lesseqgtr x_{д}, \text{ а } x_{д}\gtreqless X;$$

$$|\Delta x_{д}|=|\Delta x_{ист}| \text{ при } n\to\infty.$$

По этим формулам находят абсолютную погрешность измерения, выражающуюся в единицах измеряемой величины.

В общем смысле, погрешности можно разделить по следующим признакам:

по способу выражения — абсолютные и относительные;

по характеру проявления — систематические и случайные;

по условиям измерения измеряемой величины — погрешность воспроизведения единицы, хранения единицы, передачи размера единицы физической величины.

Относительная погрешность измерения — отношение абсолютной погрешности измерения к истинному или действительному значению измеряемой величины. Она выражается в долях значения измеряемой величины или процентах. Относительную погрешность находят по формулам:

$$\delta=\frac{\Delta x_{ист}}{X} \text{ или } \delta=\frac{\Delta x_{д}}{x_{д}}\cdot 100. \tag{4.3}$$

Например, если действительное значение массы $x_{д}=10$ кг, а абсолютное значение погрешности $\Delta x=0{,}01$ кг, то относительная погрешность составит

$$\delta=\frac{0{,}01}{10{,}00}=0{,}001 \text{ или } \delta=\frac{0{,}01}{10{,}00}\cdot 100\,\%=0{,}1\,\%.$$

Использование относительных погрешностей в ряде случаев значительно удобнее, так как по значению относительной погрешности можно судить о качестве полученного результата.

Систематическая погрешность измерения — составляющая погрешности измерения, остающаяся постоянной или закономерно изменяющаяся при повторных измерениях одной и той же величины. Эти погрешности могут быть в большинстве случаев изучены до начала измерений, и результат измерения может быть уточнен или путем внесения поправок, если числовые значения этих погрешностей определены, или путем использования таких способов измерений, которые дают возможность исключить влияние систематических погрешностей без их определения.

Результаты измерений тем ближе к истинному значению, чем меньше оставшиеся неисключенные систематические погрешности.

По характеру проявления систематические погрешности подразделяются на постоянные, прогрессивные и периодические.

Постоянные погрешности — погрешности, длительное время сохраняющие свое значение. Они встречаются наиболее часто. К постоянным относятся погрешности большинства мер (гирь, концевых мер длины), погрешности градуировки шкал измерительных приборов и др.

Прогрессивные погрешности — непрерывно возрастающие или убывающие погрешности. К ним относятся погрешности от износа контактирующих деталей средств измерений, постепенное падение напряжения источника тока и др.

Периодические погрешности — погрешности, периодически изменяющие значение и знак. Обычно эта погрешность встречается в угломерных приборах с круговой шкалой.

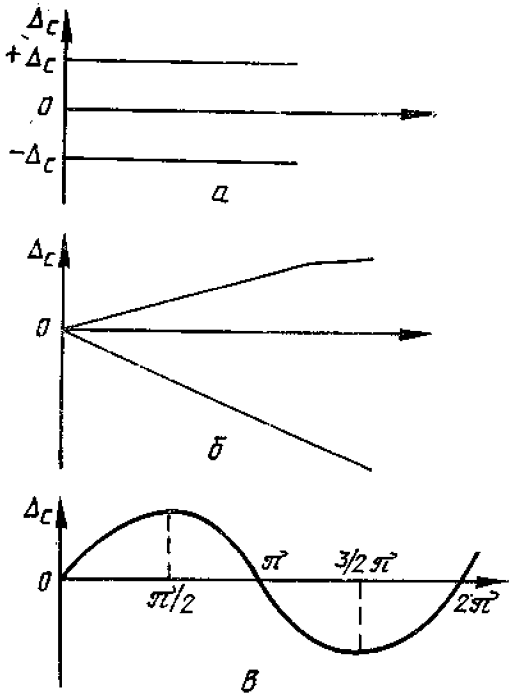

Рис. 4.2

Влияние систематических погрешностей можно представить графиками (рис. 4.2).

В зависимости от возникновения систематические погрешности подразделяются: инструментальные, являющиеся следствием износа деталей прибора, излишнего трения в механизме прибора, несоответствия действительного и номинального значений меры и др.; погрешности метода измерений, возникающие из-за несовершенства метода измерений; иногда эту погрешность называют теоретической; субъективные, обусловленные индивидуальными свойствами оператора. Иногда они называются личной разностью. Большую роль в возникновении этих погрешностей играет скорость реакции на полученный сигнал. Так, время реакции с момента подачи светового сигнала разных людей колеблется от 0,15 до 0,25 с.

Систематические погрешности искажают результат измерений, поэтому их необходимо исключать из результата измерения путем введения поправок или регулировкой прибора с доведением систематических составляющих погрешности до минимума.

Существует также понятие «неисключенная систематическая погрешность», которую иногда называют неисключенным остатком систематической погрешности. Она может быть определена по формуле

$$\Theta = k\sqrt{\sum_{1}^{n}\Theta_i^2}, \qquad (4.4)$$

где Θ_i — неисключенные систематические погрешности; k — коэффициент зависимости неисключенных систематических погрешностей.

Случайная погрешность измерения — составляющая погрешности результата измерения, изменяющаяся случайным образом при повторных измерениях одной и той же величины. Эта погрешность возникает вследствие вариации показаний измерительного прибора, погрешности округления при отсчитывании показаний измерительного прибора, изменений условий измерения случайного характера и т. д. Случайные погрешности не поддаются исключению из результатов измерений, как систематические. Однако проведение повторных измерений дает возможность, используя методы теории вероятности и математической статистики, уточнить результат, т. е. приблизить значение измеряемой величины к истинному ее значению (см. разд. 7).

Например, получено 10 результатов измерений длины стержня (мм): $l_1=58{,}59$; $l_2=58{,}49$; $l_3=58{,}55$; $l_4=58{,}48$; $l_5=58{,}53$; $l_6=58{,}52$; $l_7=58{,}42$; $l_8=58{,}51$; $l_9=58{,}46$; $l_{10}=58{,}45$.

Результаты измерений незначительно расходятся между собой вследствие влияния случайных погрешностей. Максимально приближенным к истинному значению будет значение

$$l = \frac{\sum_{1}^{10} l_i}{n} = 58{,}50 \text{ (мм)},$$

т. е. среднее арифметическое значение.

В практике метрологических работ находят также применение:

статическая погрешность — погрешность результата измерения, обусловленная условиями статического измерения;

динамическая погрешность — погрешность результата измерения, обусловленная условиями динамического измерения;

погрешность воспроизведения единицы — погрешность результата измерения, выполняемого при воспроизведении единицы физической величины;

погрешность передачи размера единицы —погрешность результата измерения, выполняемого при передаче размера единицы.

Отдельно рассмотрим *грубую погрешность измерения* — погрешность измерения, существенно превышающая ожидаемую при данных условиях. Результаты измерений, содержащие грубые погрешности, в расчет не берутся. Основными причинами этих погрешностей являются ошибки экспериментатора, резкое и неожиданное изменение условий измерения, неисправность прибора и др.

Грубые погрешности не всегда легко обнаружить, для их выявления используют математические методы.

4.2. ИСКЛЮЧЕНИЕ СИСТЕМАТИЧЕСКИХ ПОГРЕШНОСТЕЙ

В разд. 4.1 дана общая характеристика систематических погрешностей, которые вызывают искажение результата измерений. Наибольшую опасность в этом отношении имеют невыявленные систематические погрешности, которые могут быть причиной ошибочных научных выводов, неудовлетворительной конструкции средств измерений и снижения качества продукции в производстве.

При проведении измерений стараются в максимальной степени или исключить, или учесть влияние систематических погрешностей. Условно можно выделить четыре основные группы:

устранение источников погрешностей до начала измерений;
устранение погрешностей в ходе измерений;
внесение известных поправок в результат измерения;
оценка границ неисключенных систематических погрешностей.

Устранение источников погрешностей до начала измерений является наиболее рациональным, так как в этом случае существенно упрощается и ускоряется процесс измерений.

Оператор до начала работ устраняет источники погрешностей путем непосредственного их удаления (например, источника тепла), защиты измерительной аппаратуры и объекта измерений от влияния этих источников.

Инструментальные погрешности конкретного средства измерений могут быть устранены до начала измерений путем ремонта, регулировки. Погрешности измерений, возникающие из-за неправильной установки средств измерений, также можно устранить в большинстве случаев.

Погрешности измерений, возникающие вследствие влияния внешних полей, также стараются исключить всевозможными мерами. Например, влияние магнитного поля Земли устраняется устройством замкнутых и непрерывных экранов из магнитомягких материалов.

Погрешности, вызванные вредным влиянием сотрясений, вибраций, устраняются путем амортизирования средств измерений и их деталей. Для этого используют поглотители колебаний в зависимости от частоты этих колебаний и чувствительности средств измерений к этим влияниям. Например, устройство подкладок из губчатой резины к средствам измерений, различного рода подвесы (струны, пружины и т. д.).

Следующим способом устранения систематических погрешностей является их исключение в процессе измерения. К достоинствам способа относится то обстоятельство, что нет необходимости применять какие-либо устройства и приспособления. Этим способом имеется возможность исключить инструментальные погрешности, погрешности от установки, погрешности от внешних влияний.

Наиболее распространенным способом исключения систематической погрешности является *способ замещения,* суть которого заключается в том, что измеряемый объект заменяют известной мерой, находящейся в тех же условиях. Например, при измерениях

электрических параметров —сопротивления, емкости, индуктивности — объект подключается в измерительную цепь. В большинстве случаев при этом пользуются нулевыми методами (мостовым, компенсационным и др.), при которых производится электрическое уравновешивание цепи. После этого, не меняя схемы, вместо измеряемого объекта включают меру переменного значения (магазин сопротивлений, емкости, индуктивности и т. д.) и, изменяя их значение, добиваются восстановления равновесия цепи. В этом случае способом замещения исключается остаточная неуравновешенность мостовых цепей, влияния на цепь магнитных и электрических полей и др.

В ходе измерений оператор может исключить систематическую погрешность и *способом компенсации* ее по знаку, суть которого заключается в том, что измерения проводят дважды так, чтобы погрешность входила в результаты с противоположными знаками. Исключается она при вычислении среднего значения:

$$\overline{x} = \frac{x_1+x_2}{2} = \frac{(x_д+\Delta_c)+(x_д-\Delta_c)}{2}\ , \tag{4.5}$$

где $\overline{x}$ — среднее арифметическое значение измеряемой величины; x_1, x_2 — результаты измерений; $x_д$ — действительное значение измеряемой величины, Δ_c — систематическая погрешность.

Характерным примером способа компенсации является исключение погрешности, обусловленной включением магнитного поля Земли. Первое измерение проводят, когда средство измерения находится в любом положении. Перед проведением второго средство измерений поворачивают в горизонтальной плоскости на 180°. Если в первом случае магнитное поле Земли, складываясь с полем средства измерений, вызвало положительную погрешность, то при повороте на 180° магнитное поле Земли будет оказывать противоположное действие и вызовет отрицательную погрешность по размеру, равному первой.

В некоторых случаях используется *способ противопоставления,* суть которого заключается в том, что измерение проводят 2 раза так, чтобы причина, вызывающая погрешность, при первом измерении оказала противоположное действие на результат второго. Рассмотрим его на примере взвешивания на равноплечих весах. Условие равновесия коромысла выглядит следующим образом:

$$m_1\cdot l_2=m_2\cdot l_1, \tag{4.6}$$

где m_1 — масса взвешиваемого груза; m_2 — масса уравновешивающих гирь; l_1 и l_2 — соответствующие плечи коромысла. Влияние неравноплечности будет выглядеть в виде множителя l_2/l_1 или

$$m_1= \frac{l_2}{l_1}\cdot m_2\ . \tag{4.7}$$

Если повторить взвешивание, поместив груз на чашу весов, на которой ранее были гири, получим

$$m_2'\cdot l_1=m_1\cdot l_2;\ (m_2'\neq m_2)\ . \tag{4.8}$$

Разделив первое условие равновесия на второе, найдем, что

$$\frac{m_1}{m_2'}=\frac{m_2}{m_1}\ , \qquad (4.9)$$

откуда

$$m_1=\sqrt{m_2\cdot m_2'} \qquad (4.10)$$

Если m_2 и m_2' лишь незначительно отличаются друг от друга, то $m_1=(m_2+m_2')/2$, т. е. влияние на результат неравноплечия весов окажется исключенным.

Для исключения прогрессирующего влияния какого-либо фактора, являющегося линейной функцией времени (например, постепенного прогрева аппаратуры, падения напряжения в цепи питания, вызванного разрядом аккумулятора и т. д.), применяется *способ симметричных наблюдений.* Такая функция может быть изображена в виде графика на (рис. 4.3). По оси абсцисс отложено время, а по оси ординат — прогрессивная погрешность.

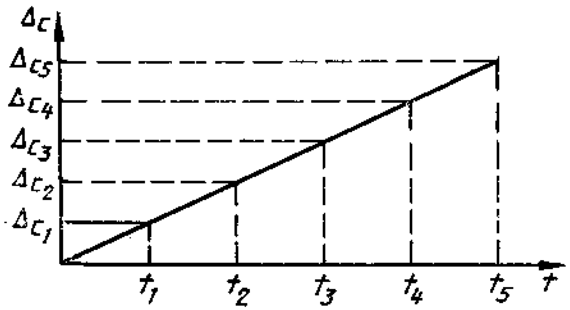

Рис. 4.3

Способ симметричных наблюдений заключается в том, что в течение некоторого интервала времени выполняется несколько измерений одной и той же величины постоянного размера и за окончательный результат принимается полусумма отдельных результатов, симметричных по времени относительно середины интервала. Например, было произведено пять измерений в момент времени t, когда погрешность имела значение Δ_{c1}, очевидно, что

$$\frac{\Delta_{c}+\Delta_{c5}}{2}=\frac{\Delta_{c2}+\Delta_{c4}}{2}=\Delta_{c3}. \qquad (4.11)$$

Рекомендуется использовать данный способ, когда не очевидна возможность существования прогрессивной погрешности. Если измерения не удалось организовать так, чтобы исключить или скомпенсировать какой-либо фактор, влияющий на результат, то в последний вводится поправка. Наиболее распространенным способом внесения поправок является алгебраическое сложение результата

измерения и поправок V_i с учетом ее знака. Поправка по числовому значению равна систематической погрешности и противоположна ей по знаку (аддитивная поправка):

$$\Delta_{ci}=-V_i. \qquad (4.12)$$

В некоторых случаях погрешность исключают путем умножения результата измерения на поправочный множитель, который может быть больше или меньше единицы (мультипликативная поправка).

В то же время, в ряде случаев исключение систематических погрешностей оказывается практически невозможным.

Систематические погрешности, остающиеся после введения поправок на ее наиболее существенные составляющие, включают в себя ряд элементарных составляющих, называемыми *неисключенными остатками* систематических погрешностей. К их числу относят: погрешности определения поправок; погрешности, зависящие от точности измерения влияющих величин, входящих в формулы для определения поправок; погрешности, связанные с колебаниями влияющих величин в столь малых пределах, что поправки на них не вводятся.

Вопросы для самопроверки

1. Дайте определения понятий «истинное», «действительное» значения измеряемой величины; «погрешность измерения», «абсолютная» и «относительная» погрешность измерения.
2. Дайте определение понятий «систематическая» и «случайная» погрешности измерения. Объясните особенности систематических погрешностей.
3. Назовите виды систематических погрешностей, объясните способы их исключения. Раскройте взаимосвязь, укажите различия случайных и систематических погрешностей.
4. Назовите методы исключения систематических погрешностей в процессе измерения. Объясните область применения и особенности методов компенсации погрешностей по знаку и замещения.
5. Объясните область применения, достоинства методов противопоставления и симметричных наблюдений при исключении систематических погрешностей.
6. Объясните особенности исключения систематических погрешностей после проведения измерений.
7. Дайте классификацию систематической составляющей погрешности по причинам возникновения и характеру проявления. Приведите соответствующие примеры.

ЗАДАЧИ И ПРИМЕРЫ К РАЗД. 4

1. Исследование точности измерений линейного размера изделия контролером ОТК проводилось путем возврата проконтролированного изделия в цех и подача его на контроль повторно с очередной группой изделий. Когда одно и то же изделие было подвергнуто контролю 30 раз через примерно равные промежутки времени, были сделаны выписки из журнала контролера, в котором он регистрировал результаты измерений. Результатом измерений (в миллиметрах), выписанные в том порядке, в каком они были получены, образовали следующий ряд:

40,15; 40,16; 40,16; 40,17; 40,16; 40,16; 40,16; 40,15; 40,16; 40,16; 40,17; 40,17; 40,17; 40,17; 40,15; 40,18; 40,19; 40,18; 40,18; 40,18; 40,19; 40,19; 40,19; 40,18; 40,21; 40,19; 40,18; 40,19; 40,19; 40,19.

Выполнить обработку ряда измерений, подготовить его для нахождения показателей точности, характеризующих случайную погрешность измерений, и определить переменную систематическую погрешность выполняемых контролером измерений.

Решение. Первичная обработка последовательности промежуточных результатов измерений одной и той же величины заключается в исключении переменной систематической погрешности с целью исправления результатов измерений и их группирования для получения вариационного ряда.

Постоянная составляющая систематической погрешности не может быть не выявлена, ни тем более найдена методами совместной обработки результатов измерений. Однако она не может исказить ни показатели точности измерений, характеризующие случайную (центрированную) погрешность измерений, ни результат нахождения переменной составляющей систематической погрешности. Поэтому такие задачи могут решаться как при отсутствии, так и при наличии постоянной систематической погрешности.

Наличие существенной переменной составляющей систематической погрешности (прогрессирующей, периодической или изменяющейся по какому-либо другому неслучайному закону) искажает оценки характеристик случайной погрешности и аппроксимацию ее распределения. Поэтому она должна обязательно выявляться, исключаться из результатов измерений и учитываться в оценках систематической погрешности. Переменная систематическая погрешность может быть выявлена весьма сложными методами дисперсионного анализа. Однако для решения инженерных задач обычно достаточно применить графический метод. Для этого на график по оси ординат наносятся точки с координатами, выражающими значение (результат измерения), а по оси абсцисс—момент времени его получения (или порядковый номер результата при равномерном во времени получении результатов). Для наглядности точки целесообразно соединить прямыми линиями. Для рассматриваемой задачи такой график приведен на рис. 4.4.

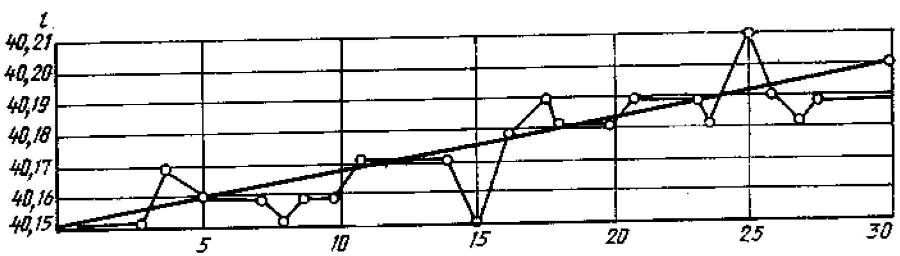

Рис. 4.4

На графике проводят плавную кривую, которая выражает тенденцию изменения результата измерения, если она видна, или констатируют, что такая тенденция не наблюдается и тогда считают переменную систематическую погрешность практически отсутствующей (несущественной.)

В рассматриваемой задаче явно выражена прогрессирующая линейно возрастающая по модулю погрешность. В таком случае следует зафиксировать, что модуль переменной составляющей систематической погрешности $\widehat{\delta}_i=0{,}05/30\cdot i$, где i — порядковый номер измерения. Округлив значение $\widehat{\delta}_i$ до сотых долей миллиметра, ее исключают из результатов измерений, заменяя исходную последовательность результатов следующей последовательностью, полученной по формуле: 40,15; 40,15; 40,15; 40,16; 40,15; 40,16; 40,15; 40,14; 40,15; 40,14; 40,16; 40,15; 40,16; 40,15; 40,13; 40,15; 40,16; 40,15; 40,15; 40,16; 40,16; 40,15; 40,15; 40,14; 40,17; 40,15; 40,14; 40,14; 40,14; 40,14.

Сгруппировав исправленные результаты, получают следующий вариационный ряд:

Результаты измерений, мм . . .	40,13	40,14	40,15	40,16	40,17
Число результатов	1	7	18	3	1

2. Измерения безусловно неизменной массы баллона с сжиженным газом привели к следующим последовательно полученным через примерно равные промежутки времени результатам (в кг): 3,125; 3,132; 3,139; 3,138; 3,136; 3,134; 3,134; 3,132; 3,124; 3,132; 3,125; 3,136; 3,130; 3,129; 3,129; 3,125; 3,136; 3,126; 3,127; 3,125.

Выполнить первичную обработку ряда измерений, исключив переменную систематическую погрешность и подготовив его для нахождения показателей точности, характеризующих случайную погрешность измерений примененным методом и средствами.

3. Для изучения случайной погрешности нестандартизованного средства измерений температуры этим средством в соответствии с инструкцией по эксплуатации через равные весьма малые промежутки времени многократно была измерена температура тела настолько большой массы, что изменение его температуры за все время контрольных измерений пренебрежимо мало.

Получен следующий ряд результатов (в °С): 40,40; 40,43; 40,49; 40,57; 40,57; 40,59; 40,69; 40,70; 40,68; 40,68; 40,68; 40,66; 40,68; 40,78; 40,73; 40,73; 40,76; 40,79; 40,76; 40,80; 40,79; 40,76; 40,76; 40,76; 40,72; 40,73; 40,71; 40,69; 40,68; 40,75; 40,71; 40,63; 40,63; 40,58; 40,55; 40,64; 40,58; 40,58; 40,57; 40,46.

Выполнить первичную обработку результатов измерений.

4. При многократном измерении через равные промежутки времени мощности на выходе образцового калибратора получены следующие результаты (в мм): 154,2; 154,3; 154,4; 154,3; 154,5; 154,1; 154,2; 153,9; 154,0; 154,4; 154,7; 154,8; 154,3; 154,5; 154,5; 154,1; 154,4; 154,6; 154,6; 154,9; 154,5; 154,8; 155,0; 155,4; 155,4.

Выполнить первичную обработку результатов измерений.

5. При помощи рефрактометра многократно измерялся показатель преломления синтетического материала. Получены следующие показания (в безразмерных единицах): 8,916; 8,911; 8,911; 8,911; 8,907; 8,905; 8,903; 8,903; 8,906; 8,906; 8,905; 8,899; 8,897; 8,899; 8,894; 8,900; 9,901; 8,898; 8,898; 8,900; 8,897; 8,898; 8,901; 8,901; 8,895; 8,896; 8,900; 8,898; 8,898; 8,897; 8,898; 8,896; 8,900; 8,903; 8,898; 8,900; 8,897; 8,901; 8,901; 8,900; 8,902; 8,902; 8,901; 8,901; 8,906; 8,902; 8,908; 8,909; 8,910; 8,910; 8,912.

Выполнить первичную обработку результатов измерений.

6. Показания вольтметра, взятые с интервалом 1 мин, равны 51,0; 51,2; 51,4; 51,6... В. Действительное значение напряжения 50,9 В. Определить систематическую составляющую погрешности в предположении, что случайная пренебрежимо мала.

7. При измерении напряжения с помощью вольтметра получено показание $U=21{,}5$ В, а затем в него внесена поправка $+0{,}1$ В. Определить приближенное значение погрешности измерения и погрешности средства измерения, если действительное значение напряжения $U_д=21{,}55$ В.

8. Прогрессирующая систематическая погрешность полностью определяет систематическую погрешность вольтметра. Коэффициент старения равен $K_{ст}=2{,}74\cdot10^{-6}$ В/сут. С каким интервалом следует проводить поверку вольтметра, если допустимая систематическая погрешность $\theta_{ст}$ не должна превышать 1 мВ? Изобразить зависимость $\theta_{ст}(t)$. Как изменится эта зависимость, если поверку производить с интервалом 2 года?

9. С помощью амперметра с внутренним сопротивлением R_A измерено значение тока, протекающего через резистор R, подключенный к источнику напряжения с внутренним сопротивлением R_i. Определить относительную систематическую погрешность δ_c измерения тока, вызванную сопротивлением амперметра. Построить зависимость δ_c от величины $R_A/(R+R_i)$.

10. Частота генератора, равная резонансной частоте колебательного контура, измеряется с помощью частотомера, подключенного параллельно контуру. Определить систематическую погрешность измерения частоты генератора, вызванную шунтирующим действием входной емкости частотомера $C_{вх}$. Построить зависимость δ_c от величины $C_{вх}/C$, где C — емкость контура.

11. После включения генератора в сеть его частота изменяется по закону $f=f_0+f_1e^{-t/\cdot}$. Результаты измерения частоты в момент времени $t_i=0{,}1{,}2$ мин равны соответственно 102,000; 100,927; 100,429 кГц. Определить значения f_0, f_1 и τ. Считая отклонение частоты от номинального значения 100 кГц система-

тической погрешностью, определить необходимое время прогрева генератора, если допустимая относительная систематическая погрешность равна 10^{-5}.

5. ТРЕБОВАНИЯ К СРЕДСТВАМ ИЗМЕРЕНИЙ

5.1. ПОКАЗАТЕЛИ КАЧЕСТВА СРЕДСТВ ИЗМЕРЕНИЙ

Повышению качества продукции, в том числе средств измерений, необходимо уделять особое внимание. От качества продукции зависит эффективность общественного производства, экспорт продукции, экономия материальных ресурсов, достоверный учет материально-технических ценностей.

Под качеством продукции понимают совокупность свойств продукции, обусловливающих ее пригодность удовлетворять определенные потребности в соответствии с ее назначением. Вместе с тем, между отдельными свойствами изделий имеется связь, иногда противоречивая.

Так, повышение точности средств измерений требует разработки специальных средств и мер защиты от внешних воздействий, компенсации их влияния, что может привести к снижению производительности, надежности, повышению стоимости.

В то же время качество продукции является одним из важнейщих факторов успешной деятельности любого предприятия. В условиях перехода предприятий на новые условия хозяйствования высокое качество продукции должно стать эффективным средством повышения дохода предприятий за счет снижения потерь от брака, уменьшения непроизводительных затрат на исправление дефектов, снижения штрафных санкций за нарушение стандартов и т. д.

Для измерения и оценки качества продукции до настоящего времени используются следующие показатели:

Показатели назначения характеризуются свойствами продукции, определяющими основные функции, для выполнения которых она приспособлена, и обусловливают область ее применения. К ним относят метрологические характеристики средств измерений.

Показатели надежности характеризуют свойства безотказности, ремонтопригодности и сохраняемости. Например, время безотказной работы средств измерений до отказа, оценка срока службы.

Показатели экономного использования сырья, материалов, топлива, энергии и трудовых ресурсов характеризуют свойства изделия, отражающие его техническое совершенство по уровню или степени потребляемых им сырья, материалов, топлива и трудовых ресурсов при их эксплуатации.

Эргономические показатели характеризуют систему «человек—изделие» и учитывают комплекс гигиенических, антропометрических, физиологических и психологических свойств человека, проявляющихся в производственных и бытовых процессах. Например, уровень шума, освещенности, температуры. Конкретная номенклатура определяется спецификой средств измерений.

Эстетические показатели характеризуют информационную выразительность, рациональность формы, целостность композиции и совершенство производственного исполнения. Например, унификация размеров, формы, материалов, составных частей (кнопок, шкал и др.) измерительных приборов.

Показатели технологичности характеризуют свойства состава и структуры или конструкции продукции, определяющие ее приспособленность к достижению минимальных затрат при производстве, эксплуатации и восстановлении для заданных значений показателей качества продукции, объема ее выпуска и условий выполнения работ. Например, удельная трудоемкость изготовления, удельная материалоемкость, удельная энергоемкость.

Показатель транспортабельности характеризует приспособленность продукции к перемещению в пространстве (транспортированию), не сопровождающемуся ее использованием или потреблением.

Показатели стандартизации и унификации характеризуют насыщенность продукции стандартными, унифицированными и оригинальными составными частями, а также уровень унификации с другими изделиями. Например, унификация средств измерений с целью создания информационно-измерительных схем на базе стандартных блоков и узлов.

Патентно-правовые показатели характеризуют степень обновления технических решений, использованных в продукции, их патентную защиту, а также возможность беспрепятственной реализации продукции в стране и за рубежом.

Экологические показатели характеризуют уровень вредных воздействий на окружающую среду, возникающих при эксплуатации или потреблении продукции. Например, допустимое содержание вредных примесей, выбрасываемых в окружающую среду.

Показатели безопасности характеризуют особенности продукции, обусловливающие при ее использовании безопасность обслуживающего персонала. К ним относятся вероятность безопасной работы, минимальная электрическая прочность изоляции токоведущих частей и др.

Обобщенным показателем эффективности использования продукции является интегральный показатель качества, который определяют как соотношение суммарного полезного эффекта от эксплуатации или потребления продукции и суммарных затрат на ее создание и эксплуатацию или потребление. Для средства измерений, используемого при контроле качества однотипных деталей, этот показатель находят по формуле

$$K = \frac{m}{C_1 + C_2 \cdot T_{сл} + C_3 \cdot \frac{T_{ср}}{T_р} + m(\alpha \cdot C_\alpha + \beta \cdot C_\beta)},$$

где m — среднее число деталей, которые будут проконтролированы средством измерений за весь период эксплуатации; $T_{ср}$ — средний срок службы средства измерений; $T_р$ — среднее время между ремонтами; C_1 — затраты на приобретение и ввод в действие средства измерений; C_2 — условные затраты на эксплуатацию средства измерений; C_3 — средняя стоимость ремонта; α — вероятность того, что с помощью данного средства измерений будет забракована годная деталь; C_α — средний ущерб от ошибочного бракования годной детали; β — вероятность того, что с помощью данного средства измерений будет принята бракованная деталь; C_β — средний ущерб от ошибочного принятия бракованной детали.

Важнейшими свойствами средств измерений являются те, от которых зависит качество (точность) получаемой с их помощью измерительной информации. Эти свойства определяются метрологическими характеристиками средств измерений.

5.2. МЕТРОЛОГИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СРЕДСТВ ИЗМЕРЕНИЙ

Все средства измерений независимо от их исполнения обладают рядом общих свойств, необходимых для выполнения ими функционального назначения. Технические характеристики, описывающие эти свойства и оказывающие влияние на результаты и на погрешности измерений, называются *метрологическими характеристиками средств измерений.*

В зависимости от специфики и назначения средств измерений нормируются различные наборы или комплекты метрологических характеристик. Однако эти комплекты должны быть достаточны для учета свойств средств измерений при оценке погрешностей измерений, производимых в условиях измерений, оговоренных в технических условиях на средства измерений.

Принципы нормирования метрологических характеристик определяются соответствующим стандартом. В соответствии со стандартом метрологические характеристики средств измерений используются для определения результата измерений и расчетной оценки характеристик инструментальной составляющей погрешности измерений, расчета метрологических характеристик каналов измерительных систем, оптимального выбора средств измерений, а также предназначенные для использования в качестве контролируемых характеристик при контроле средств измерений на соответствие установленным нормам.

Комплекс метрологических характеристик средств измерений конкретных видов или типов устанавливают достаточным для определения результатов измерений и расчетной оценки с требуемой точностью характеристик инструментальных составляющих погрешностей измерений, проводимых с помощью средств измерений данного вида или типа в реальных условиях применения.

Метрологические характеристики, входящие в установленный комплекс, выбирают такие, чтобы обеспечить возможность их контроля при приемлемых затратах. В эксплуатационной документации на средства измерений указывают рекомендуемые методы рас-

чета инструментальной составляющей погрешности измерений при применении средств измерений данного типа в реальных условиях в пределах нормированных рабочих условий применения.

Комплексы нормируемых метрологических характеристик выбираются из числа приведенных ниже характеристик.

Характеристики, предназначенные для определения результатов измерений (без введения поправки), или градуировочные характеристики, определяющие соотношение между сигналами на входе и выходе средств измерений в статическом режиме. К ним относятся, например, номинальная статическая характеристика преобразования измерительного преобразователя, номинальное значение однозначной меры, пределы и цена деления шкалы, виды и параметры цифрового кода средств измерений, предназначенных для выдачи результатов в цифровом коде.

Характеристики погрешностей средств измерений, определяющие характеристики систематической и случайной составляющих погрешности. К нормированным систематическим погрешностям относят значение систематической составляющей, ее предельное значение и пределы. К нормируемым случайным погрешностям относят такие, например, как среднее квадратическое значение случайной составляющей и др.

Динамические характеристики, отражающие полную математическую модель динамических свойств средств измерений. Динамические характеристики отражают инерционные свойства средств измерений при воздействии на него меняющихся во времени величин — параметров входного сигнала, внешних влияющих величин, нагрузки.

По степени полноты описания инерционных свойств средств измерений динамические характеристики делятся на полные и частные.

К полным динамическим характеристикам относятся:

дифференциальное уравнение, описывающее работу средств измерений;

передаточная функция;

переходная характеристика;

импульсная характеристика;

совокупность амплитудной и фазочастотной характеристики.

Частичными динамическими характеристиками могут быть отдельные параметры полных динамических характеристик или характеристики, не отражающие полностью динамических свойств средств измерений, но необходимые для выполнения измерений с требуемой точностью (например, время установления показания) или контроля однородности свойств средств измерений данного типа. На эти характеристики средств измерений устанавливаются нормы с целью оценки точности измерений, сравнения средств измерений между собой и выбора из них таких, которые обеспечивают требуемую точность измерений, достижение взаимозаменяемости средств измерений.

Номенклатура нормируемых метрологических характеристик и полнота, с которой они должны описывать свойства средств измерений, зависит от их назначения, условий эксплуатации, режима работы и многих других факторов. У средств измерений, используемых преимущественно для высокоточных измерений, нормируется достаточно большое количество метрологических характеристик. Комплекс их оговаривается в соответствующих стандартах. Нормы на отдельные метрологические характеристики приводятся в эксплуатационной документации (паспорте, техническом описании, инструкции по эксплуатации и т. д.) в виде номинальных значений, коэффициентов функций, заданных формулами, таблицами или графиками пределов допускаемых отклонений от номинальных значений и функций.

5.3. ПОГРЕШНОСТИ СРЕДСТВ ИЗМЕРЕНИЙ

Погрешность результата измерений в значительной мере зависит от погрешности средств измерений, являющейся важнейшей составляющей, от которой зависит качество измерений.

Теоретически *погрешность средств измерений* — это разность показаний между показанием прибора и истинным значением измеряемой величины. Она может быть вычислена по формуле

$$\Delta x = x_п - X,$$

где $x_п$ — показания прибора; X — истинное значение измеряемой величины.

Однако в связи с тем, что истинное значение величины остается неизвестным, на практике вместо него пользуются действительным значением величины, полученным при помощи точного средства измерений.

Например, при определении правильности показаний стрелочных весов на них была установлена гиря массой 0,5 кг. Показания стрелки весов — 0,510 кг. Погрешность составит $\Delta x = +0{,}010$ кг.

Погрешности средств измерений классифицируются по следующим признакам:

по характеру проявления — систематические и случайные;

по отношению к условиям применения — основные и дополнительные;

по отношению к измеряемой величине — динамические и статические;

по способу выражения — абсолютные, относительные и приведенные;

по способу суммирования — аддитивные и мультипликативные.

Огромное количество различных типов средств измерений, используемых в практической деятельности человека, потребовало кроме перечисленных составляющих погрешностей средств измерений ввести и такие понятия, как предел допускаемой погрешности и нормируемые метрологические характеристики.

Нормируемые метрологические характеристики средств измерений — наиболее рациональная совокупность составляющих погрешности конкретного типа средств измерений, устанавливаемая нормативно-техническими документами на средства измерений.

Основная погрешность средств измерений — погрешность средств измерений, определяемая в нормальных условиях его применения: $\Delta_п = a$ или $\Delta = (a + bx)$, где Δ и x выражаются в единицах измеряемой величины.

Дополнительная погрешность средств измерений — составляющая погрешности средства измерений, возникающая вследствие отклонения одной из влияющих величин от ее нормального значения или выходом ее за пределы нормальной области значений.

Относительная погрешность средств измерений — погрешность средств измерений, выраженная отношением абсолютной погрешности к действительному значению физической величины, в пределах диапазона измерений. В общем виде относительную погрешность можно записать формулой

$$\delta_п = \pm \frac{\Delta x_п}{x_п},$$

где $\Delta x_п$ — абсолютная погрешность; $x_п$ — показания прибора.

Приведенная погрешность средств измерений — относительная погрешность, определяемая отношением абсолютной погрешности измерительного прибора к нормирующему значению. Нормирующее значение — это условно принятое значение, равное или верхнему пределу измерений, или диапазону измерений, или длине шкалы и т. д. Приведенную погрешность можно определить по формуле

$$\gamma = \frac{\Delta x_п}{x_N},$$

где x_N — нормирующие значения.

Например, значения абсолютной, относительной, приведенной погрешности потенциометра с верхним пределом измерений 150 °C при $x_п = 120$ °C, действительным значением измеряемой температуры $x_д = 120{,}6$ °C и нормирующим значением-верхнего предела измерений $x_N = 150$ °C будут, соответственно, составлять $\Delta x_п = -0{,}6$ °C, $\delta = -0{,}5$ %, $\gamma = -0{,}4$ %.

Предел допускаемой погрешности средств измерений — наибольшая погрешность средств измерений, при которой оно может быть признано годным и допущено к применению. В случае превышения установленного предела средство измерений остается непригодным к применению.

Например, предел допускаемой приведенной погрешности амперметра класса 1,0 равен ± 1 % от верхнего предела измерений, т. е. при верхнем пределе измерений 10 А предел допускаемой приведенной погрешности составит 0,1 %.

Другие характеристики погрешностей приводятся в разд. 7.

5.4. КЛАССЫ ТОЧНОСТИ СРЕДСТВ ИЗМЕРЕНИЙ

Учет всех нормируемых метрологических характеристик средств измерений — сложная и трудоемкая процедура, проводимая только при измерениях очень высокой точности, характерных для метрологической практики. В обиходе и на производстве такая точность не нужна. Поэтому для средств измерений, используемых в повседневной практике, принято деление по точности на классы.

Класс точности средств измерений — обобщенная характеристика средств измерений, определяемая пределами допускаемых основных и дополнительных погрешностей, а также другими свойствами средств измерений, влияющими на точность, значения которых устанавливаются в стандартах на отдельные виды средств измерений.

Класс точности средств измерений характеризует их свойства в отношении точности, но не является непосредственным показателем точности измерений, выполненных с помощью этих средств. Например, класс точности концевых мер длины характеризует близость их размера к номинальному, допускаемое отклонение от плоскопараллельности, а также притираемость и стабильность; класс точности вольтметров характеризует пределы допускаемой основной погрешности и допускаемых измерений показаний, вызываемых внешним магнитным полем и отклонением от нормальных значений температуры, частоты переменного тока и некоторых других величин.

Классы точности устанавливаются стандартами, содержащими технические требования к средствам измерений, подразделяемым по точности. Необходимость подразделения средств измерений по точности определяют при разработке этой документации. Для каждого класса точности в стандартах на средства измерений каждого конкретного вида устанавливают конкретные требования к метрологическим характеристикам, в совокупности отражающие уровень точности средств измерений этого класса. Для малоизменяющихся метрологических характеристик устанавливают требования, единые для двух и более классов точности.

Средства измерений должны удовлетворять требованиям, предъявляемым к метрологическим характеристикам, установленным для присвоенного им класса точности как при выпуске их из производства, так и в процессе эксплуатации.

Метрологические характеристики, определяемые классами точности, нормируют следующим образом.

Пределы допускаемых основной и дополнительных погрешностей выражают в форме приведенных, относительных или абсолютных погрешностей в зависимости от характера изменения погрешностей в пределах диапазона измерений, а также от условий применения и назначения средств измерений конкретного вида.

Пределы допускаемых погрешностей выражают в зависимости от характера изменения (в пределах диапазона изменений входного или выходного сигнала) границ абсолютных погрешностей средств измерений конкретного вида, которые оценивают на основании принципа действия, свойств средств измерений, а также их назначений: в форме приведенных погрешностей — если указанные границы можно полагать практически неизменными. Например, пределы допускаемых погрешностей показывающих амперметров выражают в форме приведенных погрешностей, так как границы погрешностей средств измерений данного вида практически неизменны в пределах диапазона измерений, в форме относительных погрешностей, если указанные границы нельзя полагать постоянными, в форме абсолютных погрешностей (т. е. в единицах измеряемой величины или в делениях шкалы средств измерений), если погрешность результатов измерений в данной области измерений принято выражать в единицах измеряемой величины или в делениях шкалы. Например, пределы допускаемых погрешностей мер массы или длины выражают в форме абсолютных погрешностей, так как погрешности результатов измерений массы или длины принято выражать в единицах массы или длины.

Пределы допускаемой абсолютной погрешности устанавливают по формулам

$$\Delta_п = \mp a = p \tag{5.1}$$

или

$$\Delta = \mp (a + bx), \tag{5.2}$$

где Δ — пределы допускаемой абсолютной погрешности, выраженной в единицах измеряемой величины на входе (выходе) или условно в делениях шкалы; x — значение измеряемой величины на входе (выходе) средств измерений или число делений, отсчитанных по шкале; b — положительные числа, не зависящие от x.

При применении формул (5.1) и (5.2) для средств измерений, используемых с отсчитыванием интервалов между произвольно выбираемыми отметками шкалы, допускается указывать, что погрешность каждого средства измерений не должна превышать установленной нормы, оставаясь только положительной или только отрицательной.

Например, для генератора низкой частоты Г3-36 $\Delta = \pm(0{,}03f + 2)$ Гц.

В обоснованных случаях пределы допускаемой абсолютной погрешности устанавливают по более сложной формуле или в виде графика (рис. 5.1), либо таблицы.

Пределы допускаемой приведенной основной погрешности определяются по формуле

$$\gamma = \frac{\Delta}{x_N} = \pm p, \tag{5.3}$$

где γ — предел допускаемой приведенной основной погрешности, %; Δ — пределы допускаемой абсолютной погрешности, устанавливаемые по формуле (5.1); x_N — нормирующее значение, выраженное в тех единицах, что и Δ; p — отвлеченное положительное число, выбираемое из ряда: $1\cdot10^n$; $1{,}5\cdot10^n$; $1{,}6\cdot10^n$; $2\cdot10^n$; $2{,}5\cdot10^n$; $3\cdot10^n$; $4\cdot10^n$; $5\cdot10^n$; $6\cdot10^n$ (где $n=1$; 0; -1; -2 и т. д.).

Нормирующее значение x_N для средств измерений с равномерной или степенной шкалой, а также для измерительных преобразователей, если нулевое значение входного сигнала находится на краю или вне диапазона измерений, устанавливается по бо́льшему из пределов измерений или равным бо́льшему из модулей пределов измерений, если нулевое значение находится внутри диапазона измерений. Для электроизмерительных приборов с равномерной или степенной шкалой с нулевой отметкой внутри диапазона измерений нормирующее значение устанавливается равным сумме модулей пределов измерений.

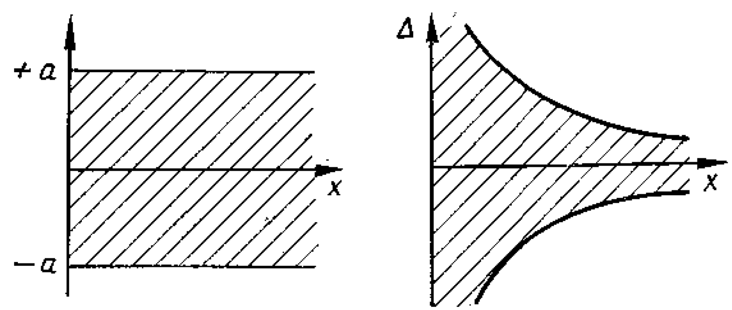

Рис. 5.1

Для средств измерений физической величины, для которой принята шкала с условным нулем, нормирующее значение устанавливают равным модулю разности пределов измерений.

Например, для милливольтметра термоэлектрического термометра с пределами измерений 200 и 600 °С нормирующее значение $x_N=400$ °С.

Для средств измерений с установленным номинальным значением нормирующее значение устанавливают равным этому номинальному значению.

Например, для частотомера с диапазоном измерений 45—55 Гц и номинальной частотой 50 Гц нормирующее значение $x_N=50$ Гц.

Измерительным приборам, имеющим неравномерную шкалу, нормирующее значение устанавливают равным всей длине шкалы или ее частей, соответствующих диапазону измерений.

Пределы допускаемой относительной погрешности устанавливают по формуле

$$\delta=\frac{\Delta}{x}=\mp q, \tag{5.4}$$

если Δ установлена по формуле (5.1), или по формуле (5.2)

$$\delta=\frac{\Delta}{x}=\pm\left[c+d\left(\left|\frac{x_k}{x}\right|-1\right)\right], \tag{5.5}$$

где δ — пределы допускаемой относительной погрешности, %; q — отвлеченное положительное число, выбираемое из ряда, аналогичного ряду для p; x_k — больший по модулю из пределов измерений

$$c=b+d;\ d=\frac{a}{|x_k|}, \tag{5.6}$$

где c и d находятся аналогично q.

В некоторых случаях пределы допускаемой относительной погрешности устанавливают по более сложным формулам или в виде графика, или таблицы. Соотношения между числами b и d устанавливаются в зависимости от вида средств измерений.

Пределы допускаемых дополнительных погрешностей устанавливают в виде постоянного значения для всей рабочей области влияющей величины или ее интервала, отношения предела допускаемой дополнительной погрешности, соответствующей интервалу величины, к этому интервалу, либо в виде зависимости предела допускаемой относительной погрешности от номинальной или предельной функции влияния. Как правило, если они определяются в виде дольного значения предела допускаемой основной погрешности.

Пределы всех основных и дополнительных допускаемых погрешностей выражаются не более чем двумя значащими цифрами, причем погрешность округления при вычислении пределов не должна превышать 5 %.

Рассмотренные метрологические характеристики позволяют выявить такую качественную характеристику, как точность средств измерений, положенную в основу деления средств измерений на классы точности. Обозначения классов точности наносятся на циферблаты, щитки и корпуса средств измерений, приводящихся в нормативно-технических документах (рис. 5.2).

При этом в эксплуатационной документации на средство измерений, содержащей обозначение класса точности, дается ссылка на стандарт или технические условия, которыми устанавливается класс точности для этого типа средств измерений.

Обозначения могут иметь форму заглавных букв латинского алфавита (например: M, C) или римских цифр (I, II, III и т. д.) с добавлением условных знаков. Смысл таких обозначений раскрывается в нормативно-технической документации. Если же класс точности обозначается арабскими цифрами с добавлением какого-либо условного знака, то эти цифры непосредственно устанавливают оценку снизу точности показаний средств измерений.

Обозначение класса точности цифрами из ряда предпочтительных чисел может сопровождаться применением дополнительных условных знаков. Например, отметка снизу 0,5; $\underset{\vee}{1{,}6}$; $\underset{\vee}{2{,}5}$ и т. д. обозначает, что у измерительных приборов этого типа с существенно неравномерной шкалой значение измеряемой величины не может отличаться от того, что показывает указатель отсчетного устройства, больше чем на указанное число процентов от всей длины шка-

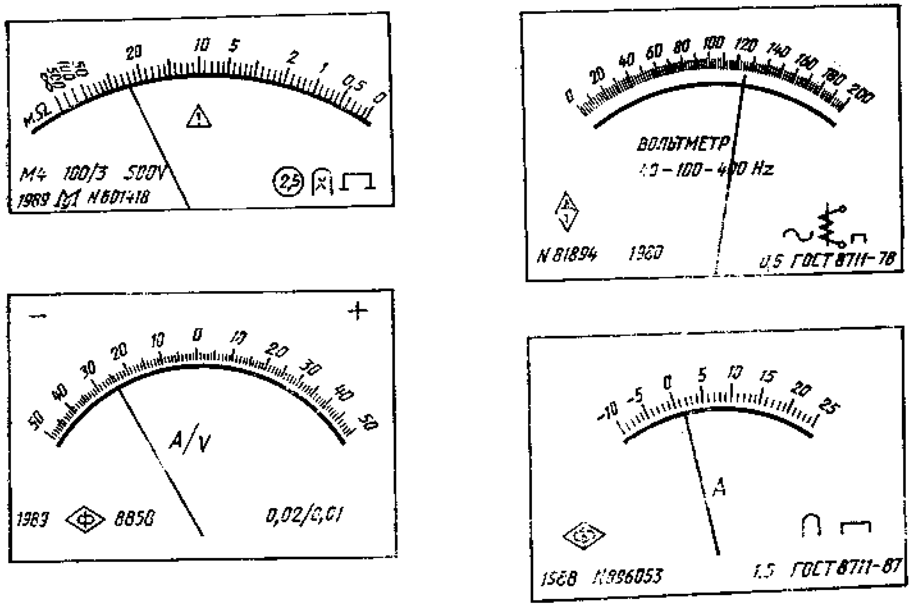

Рис. 5.2

лы или ее части, соответствующей диапазону измерений. Значение чисел в окружности, например, (0,02) (0,4) (1,0) и т. д. означает, что проценты исчисляются непосредственно от того значения, которое показывает указатель.

Иногда обозначение класса точности дается в виде дроби, например, 0,02/0,01. Это означает, что измеряемая величина не может отличаться от значения x, показанного указателем, больше чем на

$$\left[c+d\left(\left|\frac{x_k}{x}\right|-1\right)\right],$$

где c и d — соответственно числитель и знаменатель в обозначении класса точности; x_k — бóльший по модулю из пределов измерений. Правила построения и примеры обозначения классов точности в документации и на средствах измерений приведены в табл. 5.1.

Вопросы для самопроверки

1. Какие виды устройств относятся к средствам измерений?
2. На какие категории делятся средства измерений по метрологическому назначению?
3. Какие известны виды мер?

Таблица 5.1

Формула для определения пределов допускаемой погрешности	Примеры пределов допускаемой основной погрешности	Обозначение класса точности		Примечание
		в документах	на средствах измерений	
$\Delta=\mp a$	—	Класс точности M	M	—
$\Delta=\mp(a+bx)$	—	Класс точности C	C	—
$\gamma=\frac{\Delta}{x_N}=\pm p$	$\gamma=\pm1{,}5$	Класс точности 1,5	1,5	Если x_N выражен в единицах величины
	$\gamma=\pm0{,}5$	Класс точности 0,5	0,5	Если x_N определяется длиной шкалы (ее части)
$\delta=\frac{\Delta}{x}=\mp q$	$\delta=\pm0{,}5$	Класс точности 0,5	(0,5)	—
$\delta=\pm\left[c+d\left(\left\|\frac{x_k}{x}\right\|-1\right)\right]$	$\delta=\pm\left[0{,}02+0{,}01\left(\left\|\frac{x_k}{x}\right\|-1\right)\right]$	Класс точности 0,02/0,01	0,02/0,01	—

4. Как классифицируются измерительные приборы в зависимости от реализуемого метода измерений?
5. Как подразделяются измерительные приборы по способу образования показаний?
6. Что называется измерительной цепью прибора?
7. Что такое измерительный преобразователь и какие существуют виды преобразователей?
8. Какие элементы составляют измерительную установку?
9. Какие блоки входят в состав сложного измерительного прибора?
10. Каковы составные элементы простейшего измерительного прибора?
11. Из каких элементов состоит отсчетное устройство?
12. Из каких элементов состоит устройство для записи показаний?
13. Дайте определения номинального и действительного значений меры.
14. Что такое погрешность меры и поправка к номинальному значению?
15. Дайте определение погрешности измерительного прибора.
16. Какая погрешность называется основной? Какая погрешность возникает при отклонении влияющих величин от нормальных значений?
17. Что характеризует классы точности средств измерений?
18. Что характеризует стабильность средств измерений?
19. Что такое вариация показаний измерительного прибора?
20. Дайте определения понятий: рабочая часть шкалы, пределы измерений, диапазон измерений.
21. Какие различаются основные методы измерений?
22. Назовите разновидности метода сравнения с мерой.

ЗАДАЧИ И ПРИМЕРЫ К РАЗД. 5

1. Температура в термостате измерялась техническим термометром со шкалой 0—500 °С, имеющим пределы допускаемой основной погрешности ±4 °С. Показания термометра составили 346 °С. Одновременно с техническим термометром в термостат был погружен лабораторный термометр, имеющий свидетельство о поверке. Показания лабораторного термометра составили 352 °С, поправка по свидетельству составляет — 1 °С, поправка на выступающий столбик равна +0,5 °С.

Определите, выходит ли за пределы допускаемой основной погрешности действительное значение погрешности показаний технического термометра.

2. Милливольтметр имеет равномерную шкалу, разделенную на 50 интервалов. Нижний предел измерения $U_н = -10$ мВ, верхний $U_в = +10$ мВ.

Определите цену деления шкалы и чувствительность милливольтметра.

3. Зависят ли коэффициенты преобразования медного и платинового термометров сопротивления от температуры, если известно, что сопротивления связаны с температурой выражениями $R_t = R_0(1+\alpha t)$ для медного термометра, $R_t = R_0(1+At+Bt^2)$ для платинового термометра.

4. При испытании измерительной системы дифманометр — вторичный прибор в нормальных условиях эксплуатации — устанавливался в конечной точке шкалы при следующих значениях перепада давления Δp_i на входе в дифманометр:

i	1	2	3	4	5	6	7	8
Δp_i	84,15	84,06	83,80	83,90	83,94	84,10	84,02	84,03

Затем было изменено напряжение питания измерительной системы на +10 % $U_{ном}$. При этом прибор устанавливался в конечной точке шкалы при следующих значениях перепада давления Δp_i^* на входе:

i	1	2	3	4	5	6	7	8
Δp_i, кПа	83,85	83,75	83,82	83,76	83,84	83,82	83,83	83,75

Оцените погрешность показаний измерительной системы, вызванную отклонением напряжения питания. Как называется эта погрешность?

5. Определите абсолютное и относительное изменения показаний газового манометрического термометра, вызванное изменением барометрического давления от 100,45 до 96,45 кПа. Шкала прибора 0—100 °С, что соответствует изменению давления от 0,67 до 0,92 МПа. Прибор показывает температуру 80 °С. Шкала прибора равномерная.

6. Для технического манометра класса 1,5 нормальная температура окружающей среды 20±5 °С, рабочая температура +5÷+50 °С. Одинаковыми ли погрешностями будут характеризоваться показания прибора при температуре окружающей среды $t = 24$, $t = 10$ и $t = 55$ °С при условии, что остальные влияющие величины имеют нормальные значения?

7. Одинаков ли предел допускаемой относительной погрешности измерения во всех точках шкалы автоматического потенциометра?

8. Было проведено однократное измерение термо-ЭДС автоматическим потенциометром класса 0,5 градуировки ХК со шкалой 200—600 °С. Указатель стоит на отметке 550 °С.

Оцените максимальную относительную погрешность измерения термо-ЭДС потенциометром на отметке 550 °С. Зависит ли относительная погрешность от показаний прибора? Условия работы нормальные.

9. При измерении расхода калориметрическим расходомером измерение мощности нагревателя производилось по показаниям амперметра и вольтметра. Оба эти прибора имели класс точности 0,5, работали в нормальных условиях и имели, соответственно, шкалы 0—5 А и 0—30 В. Номинальные значения силы тока 3,5 А и напряжения 24 В.

Оцените погрешность, с которой производится измерение мощности.

10. Сопротивление медного термометра связано с температурой зависимостью $R_t = R_0(1+\alpha t)$.

Оцените возможные погрешности измерения температуры термопреобразователем сопротивления III класса градуировки 50 М за счет отклонения ΔR_0 и $\Delta\alpha$ при 100 и 150 °С.

11. При исследовании теплоотдачи от трубы к воздуху коэффициент теплоотдачи подсчитывался из выражения $\alpha_k = \dfrac{Q}{F(t_c - t_в)}$. Количество теплоты Q, передаваемой трубкой путем конвекции, определялось по мощности, потребляемой электронагревателем, как произведение сопротивления трубки R на квадрат силы тока I. Сила тока измерялась амперметром со шкалой 0—50 А класса 0,1, номинальное значение тока 42 А. Зависимость сопротивления трубки от температуры была найдена в специальных опытах и описана выражением $R_t = R_0(1+\alpha t)$. При $t = 0$ значение сопротивления $R_0 = 0{,}5$ Ом, $\alpha = 4\cdot 10^3$ К$^{-1}$. Погрешность измерения сопротивления не превышает 0,2%. Поверхность трубки F определялась по длине l рабочего участка и его диаметру d. Значение длины $l = 100 \pm 0{,}5$ мм, диаметра $d = 10 \pm 0{,}01$ мм. Температура стенки t_c измерялась стандартным термоэлектрическим термометром градуировки ХК. Термометр через сосуд свободным концом подсоединялся к лабораторному потенциометру ПП-63 класса 0,05. Номинальное значение температуры стенки 200 °С. Предел допускаемой погрешности, мВ, потенциометра ПП-63 определялся по формуле

$$\Delta_{t_п} = \pm(5\cdot 10^{-4}U + 0{,}5U_p),$$

где U — показания потенциометра, мВ; U_p — цена деления шкалы, мВ ($U_p = 0{,}05$ мВ). Температура воздуха $t_в$ измерялась вдали от трубки ртутным термометром повышенной точности со шкалой 100—150 °С и ценой деления 0,2 °С. Номинальное значение температуры воздуха составляет 120 °С.

Оцените погрешность измерения коэффициента теплоотдачи на лабораторной установке и наметьте возможные пути ее уменьшения. Погрешностями, связанными с методами измерения, пренебрегаем.

12. В результате проведенных измерений оказалось, что наиболее вероятное содержание кислорода в газовой смеси составляет 11,75 %. Доверительный интервал погрешности измерения определялся для доверительной вероятности 0,683 и составил ±0,5 % O_2.

Определите границы доверительного интервала при доверительной вероятности 0,95, если известно, что закон распределения погрешностей нормальный.

13. Показания амперметра 20 А, его верхний предел измерений 50 А; показания образцового прибора, включенного последовательно, 20,5 А.

Определить относительную и приведенную погрешности прибора.

Ответ: 2,5 %; 1 %.

14. Амперметр с верхним пределом измерения 10А показал ток 5,3А при его действительном значении, равном 5,23А. Определить абсолютную, относительную и относительную приведенную погрешности амперметра, а также абсолютную поправку.

Ответ: 0,07А; 1,32 %; 0,7 %; —0,07А.

15. При поверке амперметра с пределом измерения 5А в точках шкалы: 1; 2; 3; 4 и 5А получены следующие показания образцового прибора: 0,95; 2,06; 3,05; 4,07 и 4,95А. Определить абсолютные, относительные и относительные приведенные погрешности в каждой точке шкалы и класс точности амперметра.

Ответ: класс 1,5.

16. При поверке технического амперметра получены следующие показания приборов: поверяемый амперметр 1—2—3—4—5—4—3—2—1А,

образцовый амперметр $\begin{cases} \text{ход вверх } 1{,}2—2{,}2—2{,}9—3{,}8—4{,}8 \text{ А} \\ \text{ход вниз } 4{,}8—3{,}9—2{,}9—2{,}3—1{,}1 \text{ А.} \end{cases}$

Найти абсолютную и относительную приведенную погрешности, а также вариации показаний прибора. Определить, к какому классу точности его можно отнести.

Ответ: без класса.

17. Поверка вольтметра методом сравнения с показаниями образцового прибора дала следующие результаты:

3 Зак. 2625

Поверяемый прибор, V	Образцовый прибор, V при увеличении	при уменьшении
1	1,020	1,025
2	1,990	2,010
3	2,980	2,990
4	3,975	3,980
5	4,950	4,975

Определить наибольшую относительную приведенную погрешность, класс точности и вариации показаний прибора.

Ответ: 1 %; 1,0.

18. В паспорте электронного милливольтметра записано: основная приведенная погрешность прибора 2,5 %, нормальные условия работы — температура окружающей среды 20 °С, напряжение питания 220 В, частота 50 Hz; рабочие условия эксплуатации — изменение температуры от 10 до 35 °С, изменение напряжения питания от —15 до +10 %, частоты 1 %. Дополнительная погрешность прибора, вызванная отклонением любого влияющего фактора в пределах рабочего интервала, не превышает основной погрешности на каждые 10 °С изменения температуры, 10 % изменения напряжения, 1 % изменения частоты.

19. Определить относительную погрешность измерения напряжения, если показание вольтметра класса 1,0 с пределом измерения 300 V составило 75 V.

Ответ: 4 %.

20. Определить абсолютную и относительную погрешности измерений, если вольтметр с пределом измерений 300 В класса 2,5 показывает 100 В.

Ответ: 7,5; 7,5 %.

21. Для измерения напряжения используются два вольтметра: $V_1(U_{ном} = 30$ В; $K_V = 2,5)$ и $V_2(U_{ном} = 150$; $K_V = 1,0)$.

Определить, какой вольтметр измеряет напряжение точнее, если первый показал 29,5 В, а другой — 30 В.

Ответ: первый.

22. В цепь током 15 А включены три амперметра со следующими параметрами: класса точности 1,0 со шкалой на 50А, класса 1,5 на 30А и класса 2,5 на 20А. Определить, какой из амперметров обеспечит бо́льшую точность измерения тока в цепи.

Ответ: второй.

23. Через резистор сопротивлением 10 Ом протекает ток 2,5А. При измерении падения напряжения вольтметр показал 24,5 В.

Определить абсолютную и относительную погрешность измерения напряжения.

Ответ: —0,5В; 2,04 %.

24. Имеются три вольтметра: класса 1,0 с номинальным напряжением 300В, класса 1,5 на 250В и класса 2,5 на 150В.

Определить, какой из вольтметров обеспечит бо́льшую точность измерения напряжения 130 В.

Ответ: первый.

6. ОРГАНИЗАЦИЯ И ПРОВЕДЕНИЕ ИЗМЕРЕНИЙ

6.1. ПОДГОТОВКА К ИЗМЕРЕНИЯМ

Измерение — единственный источник информации о свойствах физических объектов, процессов и явлений, результаты которого используются при решении производственных, научных, социальных, экологических и других задач.

Измерительный процесс состоит из следующих этапов независимо от цели его проведения и конечного результата: подготовки к измерениям, выполнения измерений и обработки результатов измерений. Для обеспечения требуемого их качества каждый этап выполняется в соответствии с определенными правилами. Каждое измерение содержит несколько составных элементов, главными из которых являются: объект измерений, средство измерений, условие измерений.

Для получения высокой или требуемой точности производится подготовка к измерениям. Она состоит из анализа поставленной задачи, создания условий для измерений, выбора средств и методов измерений, выбора числа измерений, подготовки специалиста (оператора), опробования средств измерений.

Для правильной постановки измерительной задачи необходимо выяснить, какие физические величины или параметры подлежат измерению, какой точности должен быть результат измерений, в какой форме его следует представить?

До начала измерений стараются выбрать модель объекта, параметры которой являются величинами, подлежащими измерению. Выбранная модель должна удовлетворять двум требованиям: соответствие ее реальному объекту и стабильности измеряемых параметров в течение всего времени измерения.

Другими словами, измерять можно только постоянные физические величины, а когда речь идет об измерениях переменной физической величины, то под этим понимают либо измерение постоянных параметров этой величины, либо ее измерения проводят в определенные промежутки времени. Чем точнее модель соответствует измеряемому объекту или исследуемому явлению, тем корректнее измерительный эксперимент.

Например, при измерении длины детали в форме цилиндра, длиной ее является образующая цилиндра. Соответствием ее математической модели будет правильный цилиндр.

Таким образом, перед измерением необходимо хорошо представлять модель исследуемого объекта, которая по мере поступления измерительной информации может изменяться и уточняться.

Точность результата измерений зависит от качества средств измерений; чем точнее средство измерений, тем точнее результат. В то же время усложнение средств измерений приводит к резкому увеличению стоимости работ. Поэтому необходимо правильно соотносить требования к точности результата измерений с затратами, связанными с использованием средств измерений, оператора, подготовкой и проведением измерений.

На точность измерений влияет и подготовка лица, проводящего измерения. Он должен иметь специальную подготовку, соответствующие знания, умения, практические навыки. Важное значение имеет режим труда и отдыха, настроение экспериментатора, его собранность и внимательность.

Особое внимание обращается на санитарно-гигиенические условия труда: микроклимат, чистота воздуха, освещение, производственный шум, вибрация и др. Например, в слабо освещенных помещениях или при недостаточной освещенности шкал приборов неточность глазомерного отсчета по шкалам измерительных приборов достигает $\pm 0,1$ деления шкалы.

Полученный результат измерений обычно используется для сравнения с другими результатами измерений для дальнейших расчетов, поэтому указывают не только полученный результат, но и оценку случайных и неисключенных систематических погрешностей. Характеристики погрешностей указываются в единицах измеряемой величины либо в процентах относительно результата.

Для получения достоверных значений результатов измерений учитывается внешнее влияние величины (одной или нескольких). Например, при измерении детали штангенциркулем приходится считаться с такими влияющими величинами, как температура окружающего воздуха, освещенность поверхности детали и штангенциркуля. Очевидно, что при изменении температуры при измерении существенно изменится длина детали и существенно исказится результат измерения. При слабой освещенности оператор может неточно определить совпадение конца детали с риской штангенциркуля или его нониуса.

Влияющие величины подразделяются на следующие группы:

климатические (температура окружающей среды, относительная влажность, атмосферное давление);

электрические и магнитные (колебания электрического тока, напряжение в электрической сети, частота переменного тока, магнитное поле и др.);

внешние нагрузки (вибрации, ударные нагрузки, внешние касания деталей приборов, ионизирующее излучение, газовый состав атмосферы и т. д.).

Для конкретных областей измерений устанавливают единые условия, называемые *нормальными*. Значение физической величины, соответствующее нормальным условиям, называют номинальным значением влияющей величины.

При точных измерениях для поддержания нормальных условий применяют средства защиты от воздействия влияющих причин. Например, влияние температуры исключают путем термостатирования, влияние вибраций и сотрясений — применением амортизаторов; для защиты от магнитного поля Земли применяют экраны из магнитомягких материалов.

Влияние внешних факторов вызывает, как отмечалось, существенные погрешности измерений, их снижение является одной из важнейших задач. Ведущая роль в изменении этих погрешностей принадлежит автоматизации процесса измерений.

Выбор средств измерений определяет качество измерений. Измерения, выполняемые средствами измерений более низкого класса точности, чем требуемая, приводит к браку продукции, неверным научным выводам.

Применение точных средств измерений связано с большими материальными затратами. Обычно при выборе средств измерений

учитывают измеряемую величину, метод измерений, диапазоны измерений, характеристики погрешностей средств измерений, допускаемую погрешность измерений, стоимость средств измерений, простоту и надежность их в эксплуатации. В каждом конкретном случае выбор средств измерений ставится в зависимость от решаемой задачи, отдавая предпочтение одним факторам и пренебрегая другими.

Основными характеристиками средств измерений являются погрешности, поэтому при выборе средств измерений их рассматривают в первую очередь. К составляющим погрешности результата относят погрешность средств измерений, метода, оператора, действия влияющих величин, т. е.

$$\Delta=\Delta_{м}+\Delta_{с.и}+\Delta_{в.ф}+\Delta_{0} \quad (6.1)$$

или

$$\Delta\leqslant\Delta_{д}, \quad (6.2)$$

где Δ — суммарная погрешность; $\Delta_{м}$ — предельная погрешность метода; $\Delta_{с.и}$ — предел допускаемой погрешности используемых средств измерений; $\Delta_{в.ф}$ — предельная погрешность, обусловленная влиянием внешних факторов; Δ_0 — предельная погрешность оператора; $\Delta_{д}$ — допускаемая погрешность измерений.

Для решения конкретных задач используют различные методы по выбору средств измерений, в зависимости от всех составляющих погрешностей, а также используя вероятностные методы расчетов. Как отмечалось, немаловажное влияние на результаты измерений оказывает выбор методов измерений, представляющих собой прием или совокупность приемов применения средств измерений и характеризующихся совокупностью тех физических явлений, на которых основаны измерения.

Наиболее просто реализуется *метод непосредственной оценки*, заключающийся в определении величины непосредственно по отсчетному устройству измерительного прибора прямого действия. Например, взвешивание на циферблатных весах, определение размера детали с помощью микрометра. Измерения с помощью этого метода проводятся быстро, просто и не требуют высокой квалификации оператора, поскольку не надо создавать специальные измерительные установки, выполнять сложные вычисления. Однако точность измерений чаще всего оказывается невысокой из-за погрешностей, связанных с необходимостью градуировки шкал приборов и воздействием влияющих причин.

Простота метода способствует его автоматизации, что особенно важно при контроле качества продукции и поверке средств измерений.

При проведении более точных измерений применяют *дифференциальный или нулевой метод*. Эти методы являются модификациями метода *сравнения с мерой*, при котором измеряемую величину находят сравнением с величиной, воспроизводимой мерой.

Результат измерений либо вычисляют как сумму значения используемой для сравнения меры и показаний измерительного прибора, либо принимают равным значению меры. Погрешность метода характеризуется в основном погрешностью используемой меры.

Суть дифференциального метода заключается в том, что на измерительный прибор подается непосредственно разность измеряемой величины и величины, воспроизводимой мерой. Этот метод позволяет получить результаты с высокой точностью даже при применении относительно грубых средств для измерения разности. Он используется в тех случаях, когда просто и точно реализуется операция вычитания величин (длины, перемещения, электрического напряжения).

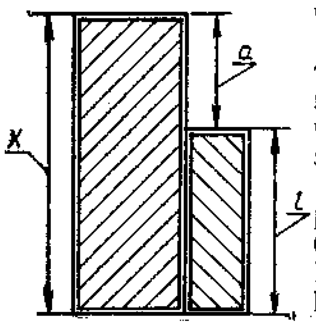

Рис. 6.1

Рассмотрим суть метода на примере. На рис. 6.1 рядом с телом, длину которого требуется измерить, помещена мера длины. Размер ее известен с достаточной точностью. Измерив небольшую разность a, получим длину $l+a$, причем погрешность измерения размера a не превышает α.

Опустив доказательство, получим относительную погрешность

$$\frac{\alpha}{l+a} \ll \frac{\alpha}{a}, \qquad (6.3)$$

где $\frac{\alpha}{l+a}$ — относительная погрешность измерения x; α/a — относительная погрешность измерения a.

Таким образом, для достижения высокой точности можно воспользоваться средством измерений сравнительно невысокой точности.

Метод имеет достоинства, главное из которых то, что изготовить точную меру и сравнительно грубый прибор для измерений небольших величин легче, чем средство измерений высокой точности для измерения всей величины в целом.

Достаточно широкое распространение в практике измерительных работ получил нулевой метод, суть которого заключается в сравнении измеряемой величины с величиной, значение которой известно. Последнюю выбирают таким образом, чтобы разность между измеряемой величиной и известной величиной равнялась нулю. Совпадение значений этих величин отмечают при помощи нулевого указателя. Примером может служить взвешивание на равноплечих весах, когда на чашку кладут гири в убывающем порядке их массы. В итоге достигается такое положение, когда наложение гири с наименьшей массой заставляет стрелку весов остановиться на нулевом показателе. Еще одним примером может служить измерение высоких температур расплавленных или раскаленных металлов на пламени методами пирометрии, суть кото-

рых заключается в следующем. Внутри зрительной трубы помещается электрическая лампа, а ее нить накаливания находится в поле зрения трубы. Трубу наводят на объект, температуру которого требуется измерить. Регулируя накал нити, добиваются того, что ее яркость будет равной яркости фона, и нить как бы исчезает. После этого отсчитывают показания пирометра. Нулевой метод используется также для измерения скорости, силы электрического тока, напряженности магнитного поля и т. д.

В практике измерительных работ находит применение *метод совпадений,* характеризующийся использованием совпадения шкал или периодических сигналов. Например, если приложить к линейке с миллиметровыми делениями линейку с дюймовыми делениями, предварительно совместив их нулевые отметки, то обнаружим, что совпадают отметки, соответствующие 127 мм и 5 дюймам, 254 мм и 10 дюймам и т. д. Отсюда 1 дюйм=25,4 мм.

Другими словами, метод совпадений — это метод сравнения с мерой, в котором разность между измеряемой величиной и величиной, воспроизводимой мерой, измеряют по совпадению отметок шкал или периодических сигналов. По принципу метода совпадения построен нониус штангенциркуля и ряда других приборов. Этот же метод лежит в основе методов измерений, в которых используются явление биений и интерференции, а также стробоскопический эффект. Например, в радиотехнике для сравнения двух близких по частоте колебаний используют явление, получившее название биений. Амплитуды двух высокочастотных колебаний при совпадении складываются, затем они перестают совпадать по фазе, а через некоторое время оказываются в противофазе. Если амплитуды равны, их сумма становится равной нулю. Чем меньше разность сравниваемых частот, тем меньше частота биений. Так, при сложении частот 100 и 101 кГц частота биений будет равна 1 кГц. Такая частота легко принимается на слух. Колебания с такой частотой можно уверенно фиксировать с помощью измерительных устройств с высокой точностью (осциллограф).

Явление интерференции света (колебаний электромагнитных волн) широко используется для точных измерений длины. К методу совпадения относятся и методы измерений, основанные на использовании стробоскопического эффекта, связанные со скоростью периодических процессов, скорости вращения, частоты колебаний, частоты переменного тока и т. д.

К разновидностям метода сравнения с мерой относится и *метод замещения,* широко применяемый в практике точных метрологических исследований. Сущность метода заключается в том, что измеряемая величина заменяется в измерительной установке некоторой известной величиной, воспроизводимой мерой. Например, при взвешивании груза на равноплечих весах его масса считается равной массе уравновешивающих гирь. Однако это справедливо при строгом равенстве плеч, так как равновесие коромысла определяется не равенством сравниваемых масс, а равенством произведений силы на плечи. На практике плечи строго не равны между собой. Поэтому груз уравновешивается не равным ему по массе набором гирь. При использовании метода замещения тот же груз уравновешивается любой тарой, а потом замещается набором гирь, при котором сохраняется равновесие коромысла. Очевидно, что масса груза в таком случае равна массе гирь, а влияние на результат измерения неравноплечности весов оказывается исключенным.

Способ замещения применяется также при электрических измерениях с помощью мостов переменного тока, условие равновесия которых определяется не только значением величин, воспроизводимых элементами плеч моста, но также и влиянием паразитных токов, емкостей индуктивности и других влияющих факторов. Эти причины вызывают погрешности, которые могут быть исключены, если проводят измерение методом замещения. Для этого вначале мост уравновешивается с включением в его цепь измеряемой величины, которая затем замещается известной величиной, а мост уравновешивается вновь. Если при этом никаких изменений ни в мосте, ни во внешних условиях не происходит, то указанные погрешности исключаются почти полностью.

6.2. УСЛОВИЯ ИЗМЕРЕНИЙ

Качество измерений физических величин в значительной мере зависит от воздействия влияющих величин таких, как температура окружающей среды, атмосферное давление воздуха, влажность воздуха, напряжение и частота в сети переменного тока, воздействие магнитных и электрических полей. Влияние этих величин в процессе измерений крайне нежелательно, так как искажается результат измерений настолько, что его невозможно будет использовать.

В общем, к влияющим относятся физические величины, которые, не являясь измеряемыми данным средством измерений, оказывают влияние на результаты измерений этим средством.

Например, на качество результатов измерений деталей из металла в значительной мере оказывают влияние колебания температуры окружающей среды, особенно металлов с большим температурным коэффициентом линейного расширения.

В этой связи для каждого вида измерений нормируют значение влияющих величин, т. е. определяют нормальные условия применения средств измерений.

Нормальные условия применения средств измерений — условия применения средств измерений, при которых влияющие величины имеют нормальные значения или находятся в пределах нормальной области значений. При нормальных условиях определяется основная погрешность средств измерений. Нормальные условия устанавливаются нормативно-техническими документами на средства измерений. Например, нормальное значение температуры для

всех видов измерений составляет 20 °C (293 K), давление воздуха 100 МПа (750 мм рт. ст.), относительная влажность воздуха 58 % и др.

Нормальное значение влияющей величины (нормальная область значений) — значение влияющей величины, устанавливаемое в стандартах на средства измерений данного вида в качестве нормального для этих средств измерений.

Кроме этих понятий, достаточно широко используется понятие *рабочая область* значений влияющей величины, т. е. область значений влияющей величины, устанавливаемая в стандартах на средства измерений данного вида, в пределах которой нормируется дополнительная погрешность этих средств измерений. Например, для измерительного конденсатора нормируют дополнительную погрешность вследствие отклонения температуры окружающей среды от нормального значения (табл. 6.1).

Таблица 6.1

Номинальные значения влияющих физических величин

Влияющая величина	Номинальное значение влияющей величины
1. Температура для всех видов измерений	20° C (293 K)
2. Давление окружающего воздуха для измерения ионизирующих излучений, теплофизических, температурных, магнитных, электрических измерений, измерения давлений и параметров движения	100 кПа (750 мм рт. ст.)
3. Давление воздуха для линейных, угловых измерений, измерений массы; силы света, измерений в спектроскопии и других областях, кроме указанных в п. 2 таблицы	101,3 кПа (760 мм рт. ст.)
4. Относительная влажность воздуха для линейных, угловых измерений, измерений массы, измерений в спектроскопии	58%
5. Относительная влажность воздуха для измерения электрического сопротивления	55%
6. Относительная влажность воздуха для измерения температуры, силы, твердости, переменного электрического тока, ионизирующих излучений, параметров движения	65%
7. Относительная влажность воздуха для всех видов измерений, кроме указанных в пп. 4, 5, 6	60%
8. Плотность воздуха	1,2 кг/м^3
9. Ускорение свободного падения	9,8 м/с^2
10. Магнитная индукция (напряженность магнитного поля) и напряженность электростатического поля для измерений параметров движения, магнитных и электрических величин	0
11. Магнитная индукция (напряженность магнитного поля) и напряженность электростатического поля для всех видов измерений, кроме указанных в п. 10	Соответствует характеристикам поля Земли в данном географическом районе

6.3. ВЫПОЛНЕНИЕ ИЗМЕРЕНИЙ

Организация процесса проведения измерений имеет большое значение для получения достоверного результата, зависящего, прежде всего, от квалификации оператора, от его технической и практической подготовки, проверки средств измерений до начала измерительного процесса, а также от выбранной методики выполнения измерений.

До производства работ оператор отрабатывает последующую процедуру выполнения измерений и операций, изучает инструкции по эксплуатации средств измерений, используемых в измерительном процессе, требования методик измерений, а также убеждается, что средства, используемые для измерений и фиксирования влияющих величин, соответствуют заданным параметрам.

Во время производства работ оператору необходимо следить за условиями измерений и поддерживать их в заданном режиме, соблюдать правила по технике безопасности при работе со средствами измерений, тщательно фиксировать отсчеты в той форме, в которой они получены, вести запись цифр с числом цифр на две больше, чем требуется в окончательном результате, определять возможный источник систематических погрешностей и др.

Принято считать, что погрешность округления при снятии отсчета оператором не должна изменять последнюю значащую цифру погрешности окончательного результата измерений. Обычно ее принимают равной 10 % от допускаемой погрешности окончательного результата измерений ($\Delta_{отсч} \leqslant 0{,}1\Delta_{окр}$). В противном случае, число отсчетов увеличивается настолько, чтобы погрешность округления удовлетворяла указанному условию.

До начала измерений оператор опробует средства измерений, т. е. проверяет действие органов управления, регулировки, настройки и т. д. Проверяются положения переключателей, их функция, исправность источников электропитания, заземляющие устройства. Если в процессе измерений используются средства автоматизации, то до начала работ через систему пропускается определенный тест, который позволяет убедиться в правильности ее функционирования.

Как уже отмечалось, единство одних и тех же измерений обеспечивается едиными правилами и способами их выполнения. Для решения этой задачи унифицируют требования к модели, средствам измерений, условиям их проведения, обработке экспериментальных данных, форме представления результата. Все это обусловливает необходимость разработки методик выполнения измерений, которые содержат следующие разделы: нормы точности измерений, используемые средства измерений, методы измерений, требования безопасности, требования к квалификации оператора, условия выполнения измерений, обработка и оформление результатов измерений.

Несмотря на кажущуюся простоту выполнения измерений, требуется понимание и тщательность выполнения всего комплекса приемов, направленных на исключение или уменьшение влияния погрешностей на результат измерений.

6.4. ПРЯМЫЕ, КОСВЕННЫЕ, СОВМЕСТНЫЕ И СОВОКУПНЫЕ ИЗМЕРЕНИЯ

Выше отмечалось, что измерения подразделяются на прямые, косвенные, совместные и совокупные. Эта классификация обусловлена приемами получения результатов измерений, и каждая категория измерений связана с определенным способом обработки экспериментальных данных для нахождения результата измерения и оценивания его погрешности.

При прямых измерениях объект исследования приводят во взаимодействие со средством измерений и по показаниям последнего отсчитывают значение измеряемой величины. Иногда показания прибора умножают на коэффициент, вводят соответствующие поправки и т. д.

Эти измерения можно записать в виде уравнения

$$X = cx, \tag{6.4}$$

где X — значение измеряемой величины в принятых для нее единицах; c — цена деления шкалы или единичного показания цифрового отсчетного устройства в единицах измеряемой величины; x — отсчет по индикаторному устройству в делениях шкалы.

Примером прямых измерений могут служить измерения массы при помощи весов и гирь, силы — посредством динамометра, элект-
рического напряжения — вольтметром и др. В прямых измерени-
ях процедура измерения может сопровождаться рядом дополни-
тельных операций. Например, снятие показаний барометра, тер-
мометра и других приборов, а также включать вычисления по не-
скольким формулам. Но вместе с тем это будут прямые измере-
ния,. так как дополнительные процедуры измерения не носят са-
мостоятельного характера, а необходимы лишь для уточнения ре-
зультата, снижения погрешности измерения.

При косвенных измерениях искомое значение измеряемой величины находят на основании известной зависимости между этой величиной и величинами-аргументами. В общем случае эту зависимость можно представить в виде функции

$$x = f(x_1, x_2, \ldots, x_n), \tag{6.5}$$

в которой значения аргументов x_1, x_2, ..., x_n находят в результате прямых, а иногда косвенных, совместных или совокупных измерений. Например, плотность однородного твердого тела $\rho = m/V$ находят как отношение массы m к его объему V, а масса и объем тела измеряются непосредственно. Для повышения точности измерений плотности ρ измерения m и V производят многократно. В этом случае плотность тела будет равна $\overline{\rho} = \overline{m}/\overline{V}$, где $\overline{m}$ — результат измерения массы тела $\overline{m}=\sum\limits_{1}^{n} m_i/n$; $\overline{V}$ — результат измерения объема тела $\overline{V}=\sum\limits_{1}^{n} V_i/n$.

По виду функциональной зависимости (6. 5) различают косвенные измерения с линейной зависимостью между измеряемой величиной и измеряемыми аргументами; косвенные измерения с нелинейной зависимостью между этими величинами; косвенные измерения с зависимостью между величинами смешанного типа.

В случае линейной зависимости уравнение (6.5) имеет вид

$$x=\sum_{1}^{n} K_i x_i,$$

где K_i — постоянный коэффициент i-го аргумента x_i; n — число слагаемых.

При косвенных измерениях с нелинейной зависимостью уравнение (6.5) имеет вид произведения некоторых функций.

$$x=\prod_{i=1}^{n} f_i(x_i). \qquad (6.6)$$

В случае косвенных измерений с зависимостью между величинами смешанного типа уравнение (6.5) имеет вид

$$x=\prod_{i=1}^{n} f_i(x_i)+\ldots+\prod_{i=1}^{n} f_i(x_i)\,. \qquad (6.7)$$

Совместные и совокупные измерения по способам нахождения искомых значений измеряемых величин очень близки; и в том и в другом случаях они находятся путем решения системы уравнений, коэффициенты в которых и отдельные члены получены в результате измерений, обычно прямых. Отличие же состоит в том, что при совокупных измерениях одновременно измеряют несколько одноименных величин, а при совместных — разноименных. Значения измеряемых величин $x_1, \ldots, x_n$ определяют на основании совокупности уравнений:

$$\begin{aligned} &f_1(x_1,\ldots,x_m,x_{11},\ldots,x_{1n})=0;\\ &f_2(x_1,\ldots,x_m,x_{21},\ldots,x_{2n})=0;\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &f_n(x_1,\ldots,x_m,x_{k1},\ldots,x_{kn})=0. \end{aligned} \qquad (6.8)$$

где $x_{11}, x_{21}, \ldots, x_{kn}$ — величины, измеряемые прямыми методами.

Совокупные измерения, как отмечалось, состоят из ряда прямых измерений однородных величин, причем, при переходе от одного ряда к другому меняются сочетания измеряемых величин. Например, при определении действительных значений гирь из одного набора для одной гири определяют ее действительное значение путем сравнения с образцовой гирей. А действительное значение остальных гирь находят в результате решения уравнения (6.8).

Они построены на основании сравнения в разных сочетаниях всех гирь, входящих в набор.

Совместные измерения основываются на известных уравнениях, отражающих существующие в природе связи между свойствами объектов, т. е. между величинами. Например, измерение, при котором электрическое сопротивление резистора при температуре +20 °С и его температурные коэффициенты находят по данным прямых измерений сопротивления температуры, выполняемых при разных температурах. Оно может быть задано уравнением

$$R=R_{20}+a(t-20)+b(t-20)^2,$$

которое выражает температурную зависимость измерительного резистора. Измеряя одновременно сопротивление резистора R и его температуру t и изменяя температуру, получают несколько уравнений, из которых находят сопротивление резистора R_{20} при температуре 20 °С и температурные коэффициенты a и b.

В общем виде можно записать уравнение

$$F_0(A,B,C,\ldots,x,y,z,\ldots)=l, \qquad (6.9)$$

где x, y, z, l — известные коэффициенты и непосредственно измеряемые величины; A, B, C — искомые неизвестные.

Подставив из опыта числовые значения x_i, y_i, z_i в уравнение (6.9), получим группу уравнений

$$F_i(A,B,C,\ldots,x_i,y_i,z_i,\ldots)=l_i, \qquad (6.10)$$

которое содержит только неизвестные искомые величины A, B, C и числовые коэффициенты. Решая совместно полученную группу уравнений, находят искомые величины.

Решение этой группы уравнений осуществляют с широким использованием ЭВМ, так как ручная обработка сложна и занимает много времени.

6.5. ОДНОКРАТНЫЕ И МНОГОКРАТНЫЕ ИЗМЕРЕНИЯ

Однократные измерения находят широкое применение во многих областях производственной деятельности, в быту, торговле. В обычных условиях нас устраивает их точность, простота выполнения. При таких измерениях показания средств измерений зачастую являются результатом измерений, а погрешность используемого средства измерений определяет погрешность результата.

Поэтому перед проведением измерений принимают меры по созданию и поддержанию нормальных условий, т. е. определяются влияющие факторы и меры, направленные на уменьшение их влияния (термостатирование, экранирование и др.), значения поправок, выбирается средство измерений, изучаются его метрологические характеристики.

Одним из главных итогов этой работы должна быть уверенность в том, что погрешности метода и оператора малы по сравнению с допускаемой погрешностью измерений (обычно допускается их сумма не свыше 30% от допускаемой погрешности измерений).

Если это условие выполняется, то в результате измерения получают одно значение отсчета, которое используется для получения единственного значения X, средства измерений, имеющего ту же размерность, что и измеряемая величина, и связанные зависимостью: $X=x[Q]$, где Q — физическая величиина.

Однократные измерения используют в тех случаях, если случайная составляющая погрешности мала по сравнению с неисключенными систематическими погрешностями, или в тех случаях, когда для их проведения есть производственная необходимость (условия измерений не позволяют провести повторные измерения).

При повышенных требованиях к точности измерений для уменьшения погрешности результата измерений проводятся многократные измерения одной и той же величины. Эти измерения повторяются оператором в одинаковых условиях, используя одни и те же средства измерений. Такие измерения характерны при выполнении метрологических работ, а также находят широкое применение в научных исследованиях. По результатам многократных измерений проводится анализ, главной особенностью которого является получение и использование большого объема измерительной информации. Общая последовательность выполнения многократных измерений одной и той же величины сводится к следующему: анализ имеющейся информации и подготовки к измерениям; получение отсчета x_i; получение n значений показаний x_i; внесение поправок и получение n значений результатов измерений Q_i; оценка среднего значения результатов измерений; оценка среднего квадратического отклонения результата измерений σ; оценка среднего квадратического отклонения среднего арифметического значения $\sigma_{\bar{Q}}$; определение пределов, в которых находится значение измеряемой величины $[Q-\varepsilon<Q<Q+\varepsilon]$.

Прежде чем приступить к обобщению результатов измерений, определяют, нет ли в полученных результатах грубых погрешностей.

Математическая сторона вопроса будет изложена в разд. 8.

Применение многократных измерений позволяет повысить точность измерения до определенного предела, но недостаток полученной информации не позволяет получить точное значение поправок, значений составляющих погрешностей и т. п. В связи с этим устанавливают необходимое число измерений, которое позволяет получить результат измерений, в котором случайная погрешность пренебрежима мала по сравнению с неисключенной систематической погрешностью. Число измерений находят по формуле $n=64(\sigma/\Theta)$.
где σ — среднее квадратическое отклонение ряда измерений, Θ — неисключенная систематическая погрешность.

6.6. РАВНОТОЧНЫЕ И НЕРАВНОТОЧНЫЕ ИЗМЕРЕНИЯ

Выше отмечалось, что ряд измерений какой-либо величины, выполненный одинаковыми по точности средствами измерений, одним оператором в одних и тех же условиях называют *равноточными*.

В то же время многократные измерения требуют много времени, в течение которого не всегда удается сохранить идентичность условий измерений. Меняющиеся условия измерений, вынужденная замена одних средств измерений другими, смена оператора — все это приводит к получению групп измерений с разными характеристиками погрешностей. Такие группы измерений называют *неравноточными*. К ним также относят и группы измерений, в которых измерение одной и той же величины производится разными методами, характеризующимися различными погрешностями.

Неравноточность таких групп измерений объясняется различием неисключенных систематических погрешностей.

Если характеристики погрешностей групп измерений одинаковы, группы измерений называют *равноточными*.

Равноточные и неравноточные группы измерений могут быть совместно статистически обработаны с целью нахождения результата измерения (подробнее см. разд. 7 и 8).

Вопросы для самопроверки

1. Что такое измерительный процесс и из чего он состоит?
2. От чего зависит точность измерения?
3. Дайте характеристику влияющих величин.
4. Характеристика метода непосредственной оценки.
5. Характеристика нулевого метода.
6. Характеристика метода совпадений.
7. Характеристика метода замещения.
8. Нормальные условия измерений. Дайте характеристику.
9. Охарактеризуйте процесс выполнения измерений.
10. Поясните прямые измерения.
11. Поясните косвенные измерения.
12. Поясните совместные и совокупные измерения.
13. Дайте характеристику однократных измерений.
14. Дайте характеристику многократных измерений.
15. Принцип равноточных и неравноточных измерений.

7. СЛУЧАЙНЫЕ ПОГРЕШНОСТИ. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ В МЕТРОЛОГИИ

7.1. ПРЕДМЕТ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Теория вероятностей — математическая дисциплина, изучающая количественные закономерности массовых случайных явлений, т. е. таких, которые при многократном воспроизведении одного и того же опыта происходят каждый раз различно.

Для изучения всего разнообразия явлений проводятся наблюдения, опыты, измерения. Наблюдения и измерения являются основой научных исследований, в ходе их выявляются как качественные, так и количественные признаки.

В метрологии уделяется достаточно большое внимание и первым, и вторым.

Количественные признаки выявляются двумя способами: точным дискретным (прерывным) счетом; измерениями, дающими, как правило, приближенные результаты.

В общем, теория вероятностей изучает не только случайные события, но и случайные величины.

Случайной называют величину, которая в результате опыта принимает значение заранее неизвестное и зависящее от случайных причин, которые заранее не могут быть учтены.

Измерением называется количественное сравнение определяемой физической величины с другой, однородной ей величиной, значение которой известно. В результате получают число, показывающее, во сколько раз определяемая физическая величина больше или меньше той, с которой ее сравнивали.

В метрологии в ходе проведения измерений основное внимание уделяется закономерностям тех случайных явлений, которые обладают относительной устойчивостью некоторых свойств в их массовом проявлении. Такие случайные явления в массовом их проявлении в обыденной жизни встречаются довольно часто.

Например, процент рождения мальчиков по отношению к общему числу рождения детей сохраняется довольно устойчиво (51,5 %).

Устойчивы также средние значения таких случайных явлений, как рост людей, месячная температура в определенных районах и т. п.

7.2. СОБЫТИЕ. ВИДЫ СОБЫТИЙ. ВИДЫ СЛУЧАЙНЫХ СОБЫТИЙ. ПОЛНАЯ ГРУППА СОБЫТИЙ

Явления, рассматриваемые в теории вероятностей, называются *событиями*. Проведение отдельного наблюдения, опыта или измерения называют *испытанием*. Его результат называют также событием.

События принято обозначать первыми прописными буквами латинского алфавита: A, B, C...

Примеры событий: а) появление при измерении положительной случайной погрешности; б) «появление герба», «появление цифры» при бросании монеты.

Событие называют *случайным* (возможным), если в результате данного испытания оно может произойти, а может и не произойти. Примеры случайных событий: величина и знак случайной погрешности результата измерения какой-либо величины; выигрыш в Спортлото; попадание в цель при выстреле.

При большом числе испытаний, производимых в одинаковых условиях, обнаруживаются вполне устойчивые закономерности, что является основой при применении методов теории вероятностей и математической статистики к обработке массовых наблюдений.

События могут быть: достоверными, невозможными и случайными.

Достоверным называют событие, которое обязательно произойдет при соблюдении определенного комплекса условий. Например, в ящике имеются только белые шары. Событие A — появление белого шара при взятии одного шара — событие достоверное. Достоверное событие обозначим буквой U. Следовательно, $A=U$.

Событие, которое при соблюдении определенных условий не может произойти, называют *невозможным*. Например, невозможным событием в предыдущем примере будет событие B — появление черного шара. Обозначается невозможное событие буквой V. Следовательно, $B=V$.

Случайные события могут быть: совместными, несовместными, единственно возможными, равновозможными.

События называют *совместными*, если при испытании они могут появиться вместе. Если A, B, C, ..., W — совместные события, и они наверняка произойдут, то: A; B; C; ...; $W=U$. Например, попадание снаряда в цель и разрыв снаряда — события совместные.

Несколько событий называют *несовместными*, если в результате данного испытания они не могут появиться вместе. Например, производится один выстрел из орудия. События: «разрыв снаряда» и «неразрыв снаряда» — несовместные события.

Единственно возможными называют события, если появление в результате испытания одного и только одного из них является достоверным событием. Например, при бросании монеты единственно возможными событиями являются: «появился герб», «появилась цифра».

Несколько событий называют *равновозможными*, если возможно появление каждого из них с одинаковой степенью уверенности. Например, появление положительных или отрицательных погрешностей при правильно поставленных измерениях.

Систему единственно возможных событий называют *полной группой событий*. Это означает, что при испытании одно из событий полной группы обязательно появится. Например, в ящике лежат белые, черные, красные шары. При испытании (т. е. при вынимании одного шара) может появиться только белый, черный или красный шар. Три события: «появление белого шара», «появление красного шара», «появление черного шара» составляют полную группу событий.

Два единственно возможных события, образующих полную группу событий, называются *противоположными*. Событие, противоположное A, обозначается той же буквой, но с чертой наверху, т. е. $\bar{A}$. Например, A — попадание в цель при выстреле. $\bar{A}$ — промах при выстреле.

В общем случае при одном испытании (и A и $\bar{A}$) $=A\bar{A}=V$ (или A или $\bar{A}$) $=A+\bar{A}=U$.

7.3. ОТНОСИТЕЛЬНАЯ ЧАСТОТА. ВЕРОЯТНОСТЬ СОБЫТИЯ

Случайное событие может появиться в результате испытаний, которые могут быть повторены любое число раз при одних и тех же условиях. Такое событие называется *массовым*. Оно может быть охарактеризовано числом, подсчитав его *частость* $\hat{p}$ или *относительную частоту*, выражающуюся отношением числа появлений этого события к числу всех произведенных испытаний: $\hat{p}=m/n$. Например, произведено 20 измерений одной и той же величины, при этом положительных погрешностей оказалось 6. Следовательно, $m=6$, $n=20$, относительная частота появления положительной погрешности $6/20=0{,}30$ или 30 %.

Относительная частота (частость) подсчитывается после опыта и выражается или дробью или в процентах.

Изучение *массовых случайных событий* показало, что при определенных условиях некоторые из них происходят с тем более постоянной устойчивой частостью, чем больше число испытаний. Появлением этих закономерностей является свойство устойчивости относительной частоты однородных случайных событий, т. е. уменьшение разброса ее значений, получаемых в разных сериях испытаний, при увеличении числа испытаний в каждой серии.

Выполнив большую серию испытаний, можно с высокой точностью предсказать результат других таких же серий испытаний.

Английский ученый К. Пирсон, определяя относительную частоту появления герба при бросании монеты 12000 и 24000 раз, получил значения этой частоты соответственно: 0,5016 и 0,5005. Нетрудно предсказать, что частость должна составлять значение, равное 0,5.

При большом числе испытаний n относительная частота обнаруживает устойчивость, которая характеризует объективную

связь между комплексом условий, в которых производится опыт, и событием.

С увеличением числа испытаний n в сериях колебания значений в разных сериях уменьшается, т. е. существует определенное значение относительной частоты, от которого она отклоняется в разных сериях испытаний в ту и другую сторону. Этой постоянной величиной является количественная мера степени объективной возможности появления события при одном опыте, называемая *вероятностью события* (p).

Вероятность p события A можно определить как отношение числа m случаев, благоприятствующих появлению события A, к числу n всех возможных случаев; при этом случаи предполагаются равновозможными, несовместными и единственно возможными.

$$p(A)=\frac{m}{n}. \tag{7.1}$$

Иногда

$$p=\frac{m}{n}. \tag{7.2}$$

Из определения следует, что вероятность любого события A заключена между нулем и единицей

$$0\leqslant p\leqslant 1. \tag{7.3}$$

Например, в ящике находится 50 белых и 46 черных шаров. Надо определить вероятность появления двух белых шаров при одновременной выборке шаров из ящика. Для этого подсчитаем число всех возможных случаев n и число случаев m, благоприятствующих появлению двух белых шаров: $n=C_{96}^2$; $m=C_{50}^2$. Тогда

$$p=\frac{m}{n}=\frac{C_{50}^2}{C_{96}^2}=\frac{\frac{50}{2!48!}}{\frac{96}{2!94!}}.$$

Пользуясь основным свойством факториалов и сделав соответствующие сокращения, получим

$$p=\frac{49\cdot 50}{95\cdot 96}\approx 0{,}27.$$

Свойство относительной частоты — устойчивость. Впервые ее отразил Я. Бернулли в виде теоремы. При числе испытаний n неограниченно большом с вероятностью, сколь угодно близкой к единице, относительная частота m/n события сколь угодно мало отличается от его вероятности в отдельном опыте.

Математическая запись может быть следующей:

$$p_{n\to\infty}\left\{\left|\frac{m}{n}-p\right|<\varepsilon\right\}>1-\delta, \tag{7.4}$$

где ε и δ — сколь угодно малые положительные числа.

Следствия из определения вероятности:

1. Вероятность невозможного события равна 0

$$p(v)=0, \qquad (7.5)$$

где v — невозможное событие.

2. Вероятность достоверного события равна 1

$$p(u)=1, \qquad (7.6)$$

где u — достоверное событие.

3. Вероятность случайного события — всегда положительное число, заключенное между нулем и единицей (см. 7.3).

Часто обозначают $p(A)=p$ — вероятность появления события; $p(\overline{A})=q$ — вероятность непоявления события, т. е.

$$p+q=1. \qquad (7.7)$$

Например, в ящике находится 20 шаров: 13 красных и 7 белых. Найти вероятность того, что, вынимая одновременно 2 шара, достанут 2 белых. Число всех равновозможных случаев вынуть пары шаров одного цвета определяется числом сочетаний из 20 по 2, т. е.

$$n=C_{20}^2=\frac{20\cdot 19}{1\cdot 2}=190.$$

Число благоприятствующих случаев определяется числом сочетаний из 7 белых шаров по 2

$$m=\frac{7\cdot 6}{1\cdot 2}=21.$$

Следовательно:

$$p=\frac{21}{190}=0{,}11 \text{ или } 11\,\%.$$

Теорема сложения вероятностей

Вероятность суммы нескольких несовместных событий, безразлично каких, равна сумме вероятностей этих событий, т. е.

$$p(B)=p(A_1+A_2+A_3+\ldots+A_n)=p(A_1)+p(A_2)+\ldots+p(A_n) \qquad (7.8)$$

или

$$p\left(\sum_1^n A_i\right)=\sum_1^n p(A_i). \qquad (7.9)$$

Докажем это, введя обозначения: n — общее число возможных исходов испытаний; m_1 — число исходов, благоприятствующих событию A_1; m_2 — число исходов, благоприятствующих событию A_2; m_n — число исходов, благоприятствующих событию A_n.

Число исходов, благоприятствующих появлению события $B=A_1+A_2+\ldots+A_n$, равно

$$m_B=m_1+m_2+\ldots+m_n. \qquad (7.10)$$

Следовательно,

$$p(B)=p(A_1+A_2+\ldots+A_n)=\frac{m_1+m_2+\ldots+m_n}{n}=$$

$$=\frac{m_1}{n}+\frac{m_2}{n}+\ldots+\frac{m_n}{n}. \qquad (7.11)$$

С учетом

$$\frac{m_i}{n}=p(A_i),\ (i=1,2,\ldots,n) \qquad (7.12)$$

получим

$$p(B)=p(A_1+A_2+\ldots+A_n)=p(A_1)+p(A_2)+\ldots+p(A_n) \qquad (7.13)$$

или

$$p\left(\sum_1^n A_i\right)=\sum_1^n p(A_i). \qquad (7.14)$$

Теорема о сумме вероятностей событий полной группы

Сумма вероятностей событий, образующих полную группу событий, равна единице.

Если события A_1, A_2, ..., A_n образуют полную группу, то появление одного из них достоверно и, следовательно,

$$p(A_1+A_2+\ldots+A_n)=1. \qquad (7.15)$$

Поскольку события полной группы попарно несовместны, применима теорема сложения

$$p(A_1)+p(A_2)+\ldots+p(A_n)=1 \qquad (7.16)$$

или

$$p_1+p_2+\ldots+p_n=1. \qquad (7.17)$$

В частном случае, когда все вероятности одинаковы,

$$P=n\cdot p. \qquad (7.18)$$

Например, в лотерее 1000 билетов, из них падает выигрыш: на один билет — 500 руб., на 10 билетов — по 100 руб., на 50 билетов — по 20 руб., на 100 билетов — по 5 руб. Остальные билеты невыигрышные.

Найти при наличии одного билета вероятность: 1) выигрыша не менее 20 руб., 2) выигрыша любой суммы.

Обозначим события: B_1 — выигрыш не менее 20 руб., B_2 — выигрыш любой суммы, A_1 — выигрыш 20 руб., A_2 — выигрыш 100 руб., A_3 — выигрыш 500 руб., A_4 — выигрыш 5 руб.:

$$B_1=A_1+A_2+A_3;$$
$$B_2=A_1+A_2+A_3+A_4.$$

Из теоремы сложения вероятностей получим

$$p(B_1)=p(A_1)+p(A_2)+p(A_3)=\frac{50}{1000}+\frac{10}{1000}+\frac{1}{1000}=0{,}061;$$

$$p(B_2)=p(A_1+A_2+A_3+A_4)=[p(A_1)+p(A_2)+p(A_3)]+p(A_4)=$$
$$=0{,}061+\frac{100}{1000}=0{,}161\ .$$

Независимые и зависимые события. Условные вероятности

Два события A и B называются *независимыми,* если наступление или ненаступление одного из них не изменяет вероятности появления другого. Например, двумя наблюдателями взято два отсчета по шкале прибора. Вероятность ошибки первого наблюдателя не зависит от ошибки второго наблюдателя и наоборот.

Два события A и B называются *зависимыми,* если вероятность появления одного из них зависит от того, появилось или не появилось другое событие. Например, если поражение цели достигается двумя попаданиями, то поражение цели при втором выстреле есть событие зависимое, так как оно может произойти лишь при условии первого попадания в цель.

Вероятность, вычисленная в предположении, что одно или несколько событий уже произошло, называется *условной вероятностью.*

Условная вероятность $p_A(B)$ равна отношению числа случаев, благоприятствующих совмещению событий A и B, к числу случаев, благоприятствующих событию A, т. е.

$$p_A(B)=\frac{l}{m}\ . \tag{7.19}$$

Теорема сложения действительна и для условных вероятностей. Например, бросают игральную кость. Пусть событием A является выпадение грани с цифрой 6, а событием B — выпадение грани с цифрой, кратной трем. Найти безусловные или условные вероятности событий A и B и установить, зависимы или независимы эти события.

Безусловные вероятности равны:

$$p_{(A)}=\frac{1}{6}\ ;\quad p_{(B)}=\frac{2}{6}\ .$$

Найдем условные вероятности. Грань с цифрой, кратной трем (событие B), выпадает в двух случаях (с цифрой 3 или с цифрой 6). Из этих двух случаев выпадению грани с цифрой 6 (событие A) благоприятствует один случай. Поэтому условная вероятность

$$p_{(B)}(A)=\frac{1}{2}\ .$$

Аналогично вычислим

$$p_A(B)=1,$$

так как условные вероятности не равны безусловным, то события A и B зависимы.

Теорема умножения вероятностей

Вероятность совместного появления нескольких независимых простых событий (одновременно или последовательно одно за другим) равна произведению их вероятностей:

$$p(A,B,C,D,\ldots,N)=p(A)\cdot p(B)\cdot p(C)\cdot\ldots\cdot p(N) \tag{7.20}$$

или

$$p=p_1\cdot p_2\cdot p_3\cdot\ldots\cdot p_n, \tag{7.21}$$

в частном случае

$$P=p^n\ . \tag{7.22}$$

В случае зависимых событий теорема умножения приобретает следующий вид. Вероятность совместного появления нескольких событий равна произведению их вероятностей, при этом события располагаются в определенном порядке и вероятность каждого события вычисляется в предположении, что все предыдущие события имели место

$$p(A_1;A_2;A_3;\ldots;A_n)=p(A_1)\cdot p_{A_1}(A_2)\cdot p_{A_1A_2}(A_3)\cdot$$
$$\cdot\ldots\cdot p_{A_1,A_2,A_{n-1}}(A_n) \tag{7.23}$$

или

$$p=p_1\cdot p_2'\cdot p_3'\cdot\ldots\cdot p_n'\ , \tag{7.24}$$

где p_2', p_3', ..., p_n' — вероятности событий, вычисленные в предположении, что каждое из предшествующих событий, выбранных в данном порядке, произошло.

Например, три учащихся стреляют в цель. Вероятность попасть в цель для первого учащегося равна 0,7, для второго — 0,6, для третьего — 0,5. Найти вероятность того, что при первом выстреле все три учащихся поразят цель.

Применяя теорему умножения для независимых событий, получим $p=0{,}7\cdot0{,}6\cdot0{,}5=0{,}21=21\ \%$.

7.4. ДИСКРЕТНЫЕ И НЕПРЕРЫВНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

Теория вероятностей предполагает, что в практической деятельности мы имеем дело со случайными величинами.

Как отмечалось, случайные величины обозначают буквами X, Y, Z, а их возможные значения — x, y, z.

Например, при бросании игральной кости случайная величина X имеет шесть возможных значений: $x_1=1$, $x_2=2$, $x_3=3$, $x_4=4$, $x_5=5$, $x_6=6$. В партии изготовленных резисторов Y — количество забракованных. Случайная величина Y может принимать значения 1, 2, 3, ..., n. Z — время исправной работы транзистора. Возможные значения этой величины принадлежат некоторому промежутку (a, b). W — расстояние, которое пролетает снаряд после выстрела из орудия. Возможные значения этой величины также принадлежат некоторому промежутку (a, b) в силу того, что расстояние будет зависеть от силы заряда, скорости, направления ветра и других причин, которые не могут быть заранее учтены.

В последних двух примерах значения случайных величин не отделены друг от друга, а непрерывно заполняют некоторый промежуток. Отсюда можно сделать заключение о целесообразности разделения случайных величин, принимающих лишь отдельные и изолированные значения, и случайные величины, возможные значения которых сплошь заполняют некоторый промежуток. Исходя из этого случайные величины подразделяют на дискретные (прерывные) и непрерывные.

Дискретной случайной величиной называют величину, возможные значения которой отделимы друг от друга и поддаются счету. Число возможных значений может быть конечным или бесконечным.

Непрерывной случайной величиной называют величину, возможные значения которой неотделимы друг от друга и непрерывно заполняют некоторый конечный или бесконечный промежуток. Непрерывная случайная величина, даже в любом конечном промежутке, имеет бесконечное множество возможных значений.

Случайную величину можно рассматривать как определенное обобщение понятия о случайном событии.

Характеристики дискретной случайной величины

Вероятностные характеристики. Для полного определения случайной величины необходимо знать не только все ее возможные значения, но и вероятности их появления.

Рассмотрим дискретную случайную величину X с возможными значениями $x_1, x_2, \ldots, x_n$, причем она может принять каждое из них с вероятностью $p(X=x_1)=p_1$, $p(X=x_2)=p_2$, ..., $p(X=x_n)=p_n$. Значения x_i, принимаемые случайной величиной, являются событиями несовместными и в совокупности составляют полную группу событий. Из теории известно, что сумма их вероятностей равна 1, т. е. $\sum\limits_1^n p_i=1$. Эта суммарная вероятность всех возможных значений x_i распределяется между отдельными возможными значениями случайной величины.

Случайная величина X может быть полностью охарактеризована с вероятностной точки зрения, если имеется возможность вычислить вероятность появления каждого ее значения.

Этим устанавливается закон распределения случайной величины.

Вероятности, с которыми данная случайная величина принимает различные значения, определяют собой в совокупности закон распределения вероятностей данной случайной величины.

Закон распределения вероятностей может быть представлен в виде аналитической зависимости, в форме таблиц или графика. Если $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — значения случайной величины X, а $p_1, p_2, \ldots, p_n$ — соответствующие вероятности их появления, то закон распределения вероятностей случайной величины X будет иметь вид:

$$X \ \ldots, x_1, x_2, \ldots, x_n$$

$$p(x_i) \ \ldots, p_1, p_2, \ldots, p_n.$$

Например, в лотерее выпущено 150 билетов. Разыгрываются 2 выигрыша по 20 руб. и 20 выигрышей по 1 руб. Найти закон распределения случайной величины X — стоимости возможного выигрыша для владельца одного билета.

Возможные значения $X: x_1=20$, $x_2=1$, $x_3=0$. Соответствующие им вероятности: $p_1=0{,}013$, $p_2=0{,}133$, $p_3=1-(p_1+p_2)=0{,}854$.

Искомый закон распределения примет вид:

X	20	1	0
$p(x_i)$	0,013	0,133	0,854

Проверка: $0{,}013+0{,}133+0{,}854=1$.

Закон распределения вероятностей дискретной случайной величины, заданный в виде таблицы, называют рядом распределения. Для удобства восприятия ряда распределения строят графики. Для этого строят точки с координатами (x_i, p_i), а затем соединяют их отрезками. Полученная фигура называется *многоугольником распределения* (рис. 7.1).

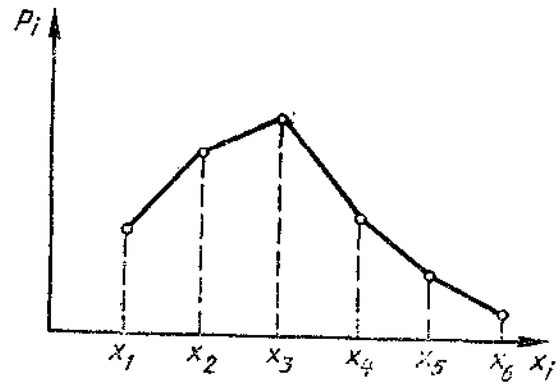

Рис. 7.1

Аналитически закон распределения задают обычно в виде функции $p(x_i)=F(x_i)$ и называют *функцией распределения*, которая является универсальной характеристикой случайной величины и существует для всех случайных величин — дискретных и непрерывных.

Числовые характеристики. На практике определение законов распределения связано с большими трудностями: получение большого количества статистического материала, проведение многочисленных и разнообразных исследований, выполнение аналитических расчетов. Поэтому используются числовые характеристики случайных величин: среднее значение, математическое ожидание, дисперсия дискретной случайной величины, среднее квадратическое отклонение.

Среднее арифметическое группы величин вычисляется как частное от деления суммы этих величин на их количество:

$$\overline{x}=\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}, \tag{7.25}$$

где $\overline{x}$ — среднее арифметическое значение; x_i — значения случайных величин; n — количество случайных величин.

Если количество случайных величин n в группе велико, то используется сокращенная запись:

$$\overline{x}=\frac{\sum\limits_1^n x_i}{n}. \tag{7.26}$$

Такая запись и подсчет $\overline{x}$ удобно лишь при незначительном количестве исходных данных. В случае большого их количества используется следующий способ.

Пусть произведено n испытаний, в которых случайная величина X приняла m_1 раз значение x_1, m_2 раз значение x_2, m_k раз значение x_k, причем $m_1+m_2+...+m_k=n$. Тогда среднее значение случайной величины $\overline{X}$ определится как среднее арифметическое этих значений:

$$\overline{X}=\frac{x_1m_1+x_2m_2+\ldots+x_km_k}{n} \tag{7.27}$$

или

$$\overline{X}=x_1\cdot\frac{m_1}{n}+x_2\frac{m_2}{n}+\ldots+x_k\frac{m_k}{n}. \tag{7.28}$$

Отметим, что отношение m_i/n есть частость появления значения x_i (статистическая вероятность) и, обозначив каждое из них через $\hat{p}_i$, получим

$$\overline{X}=x_1\hat{p}_1+x_2\hat{p}_2+\ldots+x_k\hat{p}_k=\sum_1^n x_i\hat{p}_i. \tag{7.29}$$

Например, пусть $x_1=20$, $x_2=22$, $x_3=20$, $x_4=24$, $x_5=20$. Найти $\overline{X}$. Рассматривая этот ряд величин, заметим, что три из них равны 20, одна — 22, одна — 24. Поэтому частота появления 20 равна 3, 22—1 и частота появления 24—1. Данные сведем в табл. 7.1.

Таким образом, $\overline{X}=21,2$

При большом числе испытаний

$$\hat{p}_1\approx p_1,\ \hat{p}_2\approx p_2,\ldots,\ \hat{p}_n\approx p_n,$$

где p_i — значение математической вероятности.

Таблица 7.1

x_i	m_i	$\hat{n}_i$	$x_i\hat{p}_i$
20	3	0,6	12,0
22	1	0,2	4,4
24	1	0,2	4,8
Итого	5	1,0	21,2

С учетом этого формула (7.29) примет вид

$$M(X)=\sum_1^n x_ip_i. \tag{7.30}$$

Эта формула используется в тех случаях, когда число членов вариационного ряда невелико. В тех случаях, когда используются интервальные ряды, т. е. группируют значения в интервалы, используют формулу

$$\overline{x}=\sum_1^n x_{i0}\hat{p}_i, \tag{7.31}$$

где x_{i0} — значение x в середине интервала.

Для облегчения вычислений при большом количестве интервалов удобно использовать метод произведений, приводящий к следующей формуле

$$\overline{x}=x_0+\frac{\sum\limits_1^n m_iK_i}{n}\cdot h, \tag{7.32}$$

где x_0 — выбранное условное начало, обычно равное значению X в середине интервала; K_i — значение, равное разности порядковых номеров между каждым интервалом, т. е. $n_0—n_i$; h — ширина интервала.

Таким образом, среднее значение дискретной случайной величины, полученное суммированием произведений всех ее возможных значений на их вероятности, называют математическим ожиданием и обозначают $M(X)$.

Среднее арифметическое значение $\overline{x}$ будет приближаться к математическому ожиданию $M(X)$ с увеличением числа испытаний в серии, т. е. $\overline{x}\longrightarrow M(X)$, при $n\to\infty$.

Математическое ожидание — это такая величина, около которой колеблется среднее значение случайной величины, найденное для каждой серии испытаний.

В то же время математическое ожидание и среднее значение случайную величину характеризуют неполностью. Рассмотрим пример, в котором дискретные величины X и Y заданы следующими законами распределения:

X_i	$-0{,}04$	$+0{,}04$	Y	-100	$+100$
p_i	0,3	0,3	p_i	0,3	0,3

Математические ожидания этих величин равны:

$$M(X)=-0{,}04\cdot0{,}3+0{,}04\cdot0{,}3=0;$$

$$M(Y)=-100\cdot0{,}3+100\cdot0{,}3=0.$$

Математическое ожидание обеих случайных величин одинаково, а значения величин различны, причем значения x_i были ближе к математическому ожиданию, чем y_i. Таким образом, зная лишь математическое ожидание случайной величины, еще нельзя судить о возможных ее значениях и о том, как они отличаются друг от друга и как они группируются (рассеиваются) вокруг своего математического ожидания или среднего значения.

Для более полной характеристики случайной величины используется такая характеристика как дисперсия $D(X)$, определяющая величину рассеивания случайной величины от ее математического ожидания.

$$D(X)=\sum_{1}^{n}[x_i-M(X)]^2p_i. \tag{7.33}$$

В то же время такая характеристика не имеет широкого распространения из-за того, что имеет размерность квадрата случайной величины, а потому не дает желаемой наглядности.

Значительно чаще используется среднеквадратическое отклонение случайной величины, равное значению корня квадратного из дисперсии

$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}. \tag{7.34}$$

Эта характеристика имеет размерность, совпадающую с размерностью случайной величины и является более наглядной.

Например, случайная величина X задана законом распределения:

x_i	2	5	6	8
p_i	0,1	0,2	0,5	0,2

Найти $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$.

Сведем данные и вычисления в табл. 7.2 и воспользуемся формулами (7.30), (7.33) и (7.34).

Таблица 7.2

x_i	p_i	$x_i p_i$	$x_i-M(X)$	$[x_i-M(X)]^2$	$[x_i-M(X_i)]^2p_i$
2	0,1	0,2	−3,8	14,44	1,444
5	0,2	1,0	−0,8	0,64	0,128
6	0,5	3,0	+0,2	0,04	0,020
8	0,2	1,6	+2,2	4,84	0,968
Итого	1,0	5,8			2,560

Таким образом:

$$M(X)=5{,}80;$$
$$D(X)=2{,}560;$$
$$\sigma(X)=1{,}60.$$

Статистическим аналогом среднего квадратического отклонения, принятого в теории вероятности $\sigma(X)$ в математической статистике, является величина, определяемая по формуле

$$\sigma^*=\sqrt{\frac{\sum_{1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{n}}. \tag{7.34,а}$$

Это уравнение означает, что среднее арифметическое вычитается из отдельных величин; полученные разности возводят в квадрат; все квадраты складываются, а их сумма делится на число отдельных величин n. Полученная величина означает дисперсию и определяется по формуле:

$$\sigma^{*2}=\frac{\sum_{1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{n}. \tag{7.34,б}$$

В случае использования интервальных способов вычисления дисперсии и соответственно среднего квадратического отклонения удобна формула.

$$\sigma^{*2}=\frac{1}{n}\sum_{1}^{n}(x_{i_0}-\bar{x})^2m_i \tag{7.34,в}$$

или

$$\sigma^{*2}=\sum_{1}^{n}(x_{i_0}-\bar{x})^2\hat{p}_i. \tag{7.34,г}$$

Необходимо отметить, что в метрологии используются точные формулы в отличие от приведенных, являющихся неточными.

Получаемые с помощью формул (7.34, б, 7.34, в и 7.34, г) оценки являются смещенными.

Несмещенной для дисперсии является формула

$$\sigma^2=\frac{\sum_{1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{n-1}. \tag{7.35}$$

Формула (7.34, а) может быть записана и в таком виде

$$\sigma=\sqrt{\frac{\sum_{1}^{n}x_i^2}{n}-\bar{x}^2}. \tag{7.36}$$

Формула (7.36), как и формула (7.35), используется при незначительном числе исходных данных.

В тех случаях, когда число исходных данных велико и используются частоты или статистическая вероятность, то формула (7.36) в преобразованном виде будет

$$\sigma=\sqrt{\frac{\sum\limits_{1}^{n}(m_i x_i)^2}{n}-\left(\frac{\sum\limits_{1}^{n} m_i x_i}{n}\right)^2}. \tag{7.37}$$

В случае использования выбраиного условного среднего можем записать

$$\sigma=h\sqrt{\frac{\sum\limits_{1}^{n} m_i K_i^2}{n}-\left(\frac{\sum\limits_{1}^{n} m_i K_i}{n}\right)^2}. \tag{7.38}$$

Из выше описанных методов упрощенный метод является наилучшим, особенно при большом количестве исходных данных.

Пример 1. Найти среднее арифметическое и среднее квадратическое отклонение для величин: $x_1=20$, $x_2=22$, $x_3=20$, $x_4=24$, $x_5=20$.

Решение.

$$\bar{x}=\frac{20+22+24+20+20}{5}=21{,}2.$$

$$\sigma^*=\sqrt{\frac{(-1{,}2)^2+(0{,}8)^2+(-1{,}2)^2+(2{,}8)^2+(-1{,}2)^2}{5}}=$$

$$=\sqrt{\frac{1{,}44+0{,}64+1{,}44+7{,}84+1{,}44}{5}}=\sqrt{\frac{12{,}80}{5}}=\sqrt{2{,}56}=1{,}60.$$

Также σ^* можно вычислить и по другому:

$$\sigma^*=\sqrt{\frac{\sum\limits_{1}^{n} x_i^2}{n}-\bar{x}^2}=\sqrt{\frac{20^2+22^2+20^2+24^2+20^2}{5}-(21{,}2)^2}=$$

$$=\sqrt{452-449{,}44}=\sqrt{2{,}56}=1{,}60.$$

Пример 2. Эту же задачу решим с использованием формул (7.34, а) и (7.38).

Решение. Имеющиеся данные расположим в порядке возрастания или убывания (табл. 7.3).

Таблица 7.3

x_i	m_i	K_i	$m_i K_i$	$m_i K_i^2$
24	1	1	1	1
22	1	0	0	0
20	3	−1	−3	3
Итого	5	—	−2	4

Значение среднего арифметического будет

$$\bar{x}=22+\left(-\frac{2}{5}\right)\cdot 2=22-\frac{4}{5}=21{,}2.$$

Здесь $x_0=22$, находящееся в середине ряда, $h=2$ — разность между соседними значениями;

K_i — номера интервалов группирования, отсчитанные от выбранного начала x_0. Эти номера положительны для интервалов, лежащих справа от x_0, и отрицательны для интервалов, лежащих слева.

Значение σ^* будет

$$\sigma^*=2\cdot\sqrt{\frac{4}{5}-\left(-\frac{2}{5}\right)^2}=2\sqrt{0{,}8-0{,}16}=2\cdot\sqrt{0{,}64}=$$

$$=2\sqrt{0{,}8}=1{,}60.$$

Пример 3. На ряде образцов был измерен момент в килограммометрах, требуемый для запирания коробки радиопередатчика. Результаты приведены ниже:

0,62	0,40	0,60	0,53	0,45	0,65	0,59	0,70	0,60	0,60
0,64	0,58	0,80	0,60	0,57	0,60	0,70	0,60	0,60	0,60
0,46	0,60	0,75	0,51	0,70	0,75	0,55	0,60	0,55	0,42
0,48	0,66	0,52	0,58	0,73	0,73	0,57	0,55	0,65	0,60
0,66	0,67	0,67	0,70	0,58	0,60	0,50	0,50	0,80	0,50

Вычислить среднее арифметическое, выборочную дисперсию и построить гистограмму.

Решение. Определяем количество интервалов по формуле Старджесса:

$$r=1+3{,}3\lg n=1+3{,}3\lg 50=1+3{,}3\cdot 1{,}70=1+5{,}61=6{,}61\approx 7.$$

Затем вычисляем ширину интервала h:

$$h=\frac{x_{\max}-x_{\min}}{r}=\frac{0{,}80-0{,}40}{6{,}61}=\frac{0{,}40}{6{,}61}=0{,}0605\approx 0{,}060.$$

Определим границы интервалов, частоту попадания в интервалы и середины интервалов (табл. 7.4).

Таблица 7.4

Границы интервалов x_i-x_{i+1}	Середины интервалов x_{0i}	Частота попадания в интервалы m_i	Статистическая вероятность (частость) p_i	Разность между средними интервалами и средними K_i	$K_i m_i$	$m_i K_i^2$
0,37—0,43	0,40	2	0,04	−3	−6	18
0,43—0,49	0,46	3	0,06	−2	−6	12
0,49—0,55	0,52	7	0,14	−1	−7	7
0,55—0,61	0,58	21	0,42	0	0	0
0,61—0,67	0,64	6	0,12	+1	+6	6
0,67—0,73	0,70	6	0,12	+2	+12	24
0,73—0,79	0,76	3	0,06	+3	+9	27
0,79—0,85	0,82	2	0,04	+4	+8	32
		50	1,00		+12	126

$$\overline{x}=0,58+\frac{+12}{50}\cdot 0,06=0,58+0,01=0,59.$$

В действительности это равенство является приближенным, но для определения параметров распределения вполне приемлемо.

Приведем вычисление среднего арифметического по более строгой формуле (7.29):

$$\overline{x}=0,40\cdot 0,04+0,46\cdot 0,03+0,52\cdot 0,14+0,58\cdot 0,42+0,64\cdot 0,12+$$
$$+0,70\cdot 0,12+0,76\cdot 0,06+0,82\cdot 0,04=0,0160+0,0184+0,0728+$$
$$+0,2436+0,0768+0,0840+0,0456+0,0328=0,5900.$$

Значение среднего квадратического отклонения определяем по формуле (7.38)

$$\sigma=0,06\cdot\sqrt{\frac{126}{50}-\left(\frac{+12}{50}\right)^2}=0,06\cdot\sqrt{2,52-0,0576}=$$
$$=0,06\sqrt{2,4624}=0,06\cdot 1,569=0,0941.$$

Для достижения наглядности строят различные графики статистического распределения, из которых чаще всего используют *полигон, гистограмму и кумулятивную кривую.*

Полигон и гистограмма являются графическими изображениями статистического ряда, а кумулятивная кривая — это график статистической функции распределения.

Графическими представлениями теоретических законов распределения являются многоугольник распределения, кривая распределения, графики функции распределения.

Полигон служит чаще всего для изображения дискретного статистического ряда, в то время как гистограмма строится только для интервальных рядов. Случайные же величины, для которых получены те или иные статистические ряды, могут быть при этом как дискретными, так и непрерывными.

Полигон представляет собой ломаную линию, отрезки которой соединяют точки с координатами $(x_i;\ m_i)$. Для интервального ряда строят полигон, соединяя отрезками точки с координатами $(x_{i0},\ m_i)$ или $(x_{i0},\ \widehat{p}_i)$.

Гистограмма представляет собой ступенчатую фигуру, состоящую из прямоугольников, основаниями которых служат отрезки, изображающие интервалы вариационного ряда, а высоты равны частотам или частостям соответствующих интервалов, деленным на ширину интервала. В первом случае площадь гистограммы равна объему наблюдений, во втором — единице.

Кумулятивная кривая — это кривая накопленных частот или накопленных частостей. Если вариационный ряд дискретный, то кривая представляет собой ломаную линию, отрезки которой соединяют точками с координатами $(x_i,\ m_i^{\text{нак}})$ или $[x_i,\ \widehat{F}_n(x)]$. Для

интервального вариационного ряда строят ступенчатую кривую. Ширина каждой ступеньки равна величине интервала, а ее высота — соответствующему данному интервалу значений накопленной частоты или частости.

По данным примера 3 построим гистограмму и статистическую функцию распределения. Для этого по оси абсцисс отложим значения интервалов, а по оси ординат — значения частот или статистических вероятностей (рис. 7.2, 7.3).

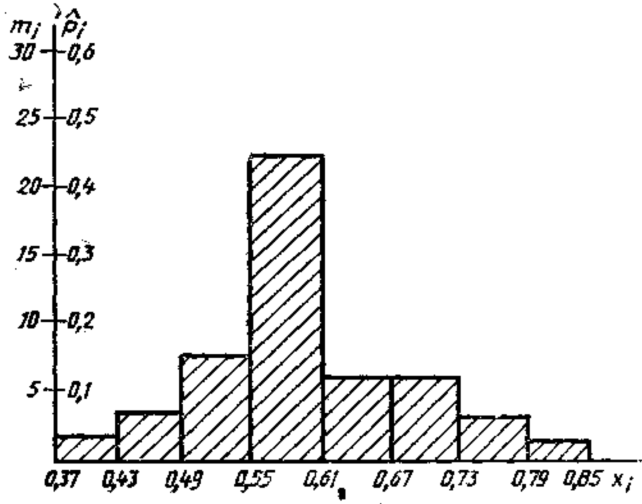

Рис. 7.2

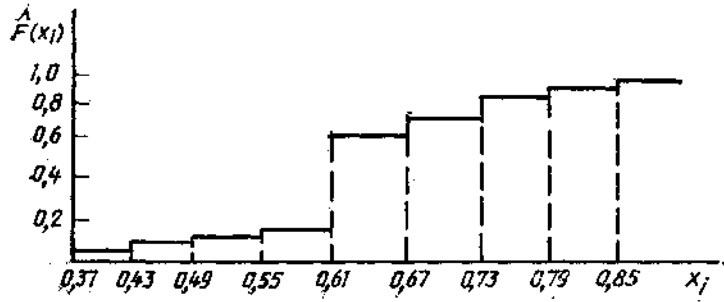

Рис. 7.3

Для построения статистической функции распределения воспользуемся формулой $F_{i+1}(x_i)=\widehat{p}_i+\overline{F}_i(x_i)$ и проведем дополнительные вычисления:

$$\widehat{F}_1(x_0)=0,\ \widehat{F}_2(x_1)=\widehat{p}_1+\widehat{F}_1(x_0)=0+0,04=0,04,$$

по аналогии:

$$\widehat{F}_3(x_2)=0{,}04+0{,}06=0{,}10;\ \widehat{F}_4(x_3)=0{,}10+0{,}14=0{,}24;$$

$$\widehat{F}_5(x_4)=0{,}24+0{,}42=0{,}66;\ \widehat{F}_6(x_5)=0{,}66+0{,}12=0{,}78;$$

$$\widehat{F}_7(x_6)=0{,}78+0{,}12=0{,}90;\ \widehat{F}_8(x_7)=0{,}90+0{,}06=0{,}96;$$

$$\widehat{F}_9(x_8)=0{,}96+0{,}04=1{,}00.$$

Полученные значения отложим по оси ординат. (см. рис. 7.3).

7.5. ЗАКОНЫ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ДИСКРЕТНОЙ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ

Биномиальное распределение (распределение Бернулли). Суть биномиального распределения очевидна из самого названия (префикс «би» означает «два»), т. е. оно описывает появление событий, имеющих два взаимоисключающих исхода. Например, если в ящике находится 100 деталей, из которых 90 — годных, 10 — бракованных. Сумма вероятностей появления годных и бракованных деталей равна 1. Предположим, что наугад берется несколько раз из ящика 10 деталей (перед каждой выборкой в ящик возвращается предшествующая выборка). Очевидно, что в силу случайности выборки будут отличаться друг от друга. В отдельных выборках будут отсутствовать бракованные детали, в других будет находиться 1, 2 и т. д. негодных деталей. Наша задача состоит в том, чтобы вычислить вероятности появления 0, 1, 2, ..., 10 бракованных деталей в выборке. Эта задача решается путем разложения по формуле бинома.

Чтобы понять его сущность, рассмотрим задачу в общем виде. Предположим, что вероятность появления исправного изделия p, а вероятность появления неисправного изделия q, причем $p+q=1$. Предположим также, что у нас имеется два элемента: один исправный, другой неисправный. Обозначим их соответственно A и $\bar{A}$. Очевидно, вероятность появления двух исправных элементов AA равна pp. Вероятность появления исправного A и неисправного $\bar{A}$ равна pq; вероятность появления неисправного $\bar{A}$—q, а исправного A—qp; вероятность появления двух неисправных элементов qq.

Сведем указанные исходы в табл. 7.5.

Таблица 7.5

Типы комбинации элементов	Исход	Вероятность каждого случайного исхода	Вероятность появления комбинации
2 исправных	AA	pp	p^2
1 исправный	$A\bar{A}$	pq	$2pq$
1 неисправный	$\bar{A}A$	qp	
2 неисправных	$\bar{A}\bar{A}$	qq	q^2

Если сложим данные последней графы, то получим: $p^2+2pq+q^2$. Известно также, что $(p+q)^2=p^2+2pq+q^2$. Отметим, что показатель степени бинома равен объему нашей выборки. Перенесем рассуждения для любого случая n, т. е. $(p+q)^n$.

Для нахождения первого члена нужно p возвести в степень, равную показателю степени бинома n. Показатель степени первого члена используется в качестве коэффициента второго члена. Показатель степени p второго члена равен $n-1$, а показатель степени q равен 1.

Второй член разложения равен вероятности появления одного неисправного элемента.

Далее следует умножить коэффициент второго члена, а именно n на показатель степени p во втором члене, который равен $n-1$, разделить это произведение на число, которое на единицу больше показателя степени q во втором члене, т. е. на 2. Таким образом определится коэффициент при третьем члене.

Продолжая эти рассуждения, в итоге получим, что коэффициенты каждого выражения могут быть найдены по формуле

$$C_n^m=\frac{n!}{m!\,(n-m)!}\ .$$

Тогда вероятность $p_n(m)$ можно определить по формуле.

$$p_n(m)=C_n^m p^{m-n} q^n. \tag{7.39}$$

Полученное выражение называют биномиальным законом распределения вероятностей или законом Бернулли.

Основные параметры этого распределения:

$$M(m)=np;$$

$$D(m)=npq;$$

$$\sigma(m)=\sqrt{npq}. \tag{7.40}$$

Биномиальное распределение справедливо при ряде независимых испытаний, в каждом из которых вероятность появления события неизменна и равна p. Биномиальное распределение имеет два постоянных параметра и переменную величину m.

Пример. Проверяется партия транзисторов, причем после испытания транзистор возвращается в партию. Вероятность появления исправного транзистора равна 0,8. Определить $p_n(m)$, $M(m)$, $\sigma(m)$ одновременного появления двух исправных транзисторов из 5.

Решение. Вероятность появления исправного транзистора равна $p=0{,}8$, следовательно, вероятность появления бракованного транзистора $q=1-0{,}8=0{,}2$. Тогда:

$$p_n(m)=C_5^2p^2q^3=\frac{5!}{2!\,(5-2)!}\ 0{,}8^2\cdot 0{,}2^3=0{,}05\cdot 5\cdot 10^{-2}\ ;$$

$$M(m)=np=5\cdot 0{,}8=4;$$

$$\sigma(m)=\sqrt{npq}=\sqrt{5\cdot 0{,}8\cdot 0{,}2}=0{,}89.$$

Формула (7.39) находит ограниченное применение в практике из-за сложности вычислений при больших значениях n и m.

При больших значения n и m (>10) вычисления факториалов становятся затруднительными. В этих случаях прибегают к приближенной формуле Стирлинга

$$n! \approx \sqrt{2\pi n} \cdot n^n \cdot e^{-n} = \left(1 + \frac{1}{12n} + \frac{1}{288n} + \ldots\right).$$

Она также встречается в следующей записи:

$$n! \approx \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n . \quad (7.41)$$

Распределение Пуассона. Как отмечалось, биномиальное распределение является весьма сложным для вычислений. Формула (7.39) может быть с некоторыми допущениями преобразована в более простую, называемую законом Пуассона:

$$p(m) = \left(\frac{1}{m!}\right) a^m e^{-a} , \quad (7.42)$$

где e — основание натурального логарифма; $a = np$ — математическое ожидание числа появления интересующего нас события.

Определяющие характеристики распределения Пуассона имеют вид:

$$M(m) = a = np; \quad (7.43)$$

$$D(m) = a; \quad (7.44)$$

$$\sigma(m) = \sqrt{a} . \quad (7.45)$$

Закону Пуассона подчинены многие случайные величины, подчиняющиеся и биномиальному распределению (рис. 7.4). Кроме того, этот закон имеет и самостоятельное применение в тех случаях, когда проводится расчет нормативов статистического контроля при определении показателей надежности. Используют его и при расчете показателей качества, в том числе надежности изделий. Для облегчения вычислений составляются таблицы (в пособии не приводятся).

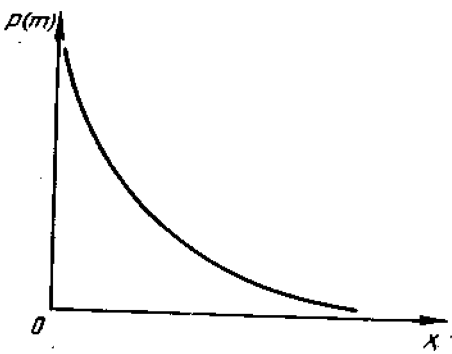

Рис. 7.4

Пример. Изделие радиоэлектронной аппаратуры содержит $5 \cdot 10^3$ транзисторов. Вероятность отказа одного транзистора в данном изделии равна $2 \cdot 10^{-4}$. Найти вероятность отказа трех транзисторов одновременно.

Решение. По условию $n = 5 \cdot 10^3$, $p = 2 \cdot 10^{-4}$, $m = 3$. Найдем $a = np = 5 \cdot 10^3 \cdot 2 \cdot 10^{-4} = 1$. Искомая вероятность будет:

$$p(m) = \left(\frac{1}{3!}\right) \cdot 1^3 \cdot e^{-1} \approx 6 \cdot 10^{-2} .$$

Функция распределения случайной величины. Закон распределения в виде ряда и многоугольника распределения может быть задан только для дискретной случайной величины. Непрерывная случайная величина принимает бесконечное множество значений, которые сплошь заполняют некоторый интервал, поэтому построить для нее ряд распределения невозможно, как невозможно перечислить все ее значения. В то же время при решении практических задач необходимо такое представление закона распределения, которое распространялось бы и на непрерывную случайную величину.

Количественной характеристикой распределения вероятностей непрерывной случайной величины служит функция распределения, которая является исчерпывающей характеристикой, пригодной как для непрерывной, так и для дискретной случайной величины.

Для получения функции распределения, применимой для характеристики как дискретных, так и непрерывных случайных величин, используется вероятность события $X < x$, где x — переменная, принимающая любые действительные значения по оси $0x$. Вероятность этого события есть некоторая функция от x.

Эта функция называется функцией распределения случайной величины X и имеет вид

$$F(x) = p(X < x). \quad (7.46)$$

Ее также называют интегральной функцией распределения или интегральным законом распределения. Она определяет вероятность того, что случайная величина X примет значение, меньшее x. Универсальность закона заключается и в том, что он полностью характеризует как дискретные, так и непрерывные случайные величины.

Если случайную величину рассматривать как случайную точку X на оси $0x$, то $F(x)$ есть вероятность того, что точка X находится левее некоторой точки x на оси $0x$ (рис. 7.5).

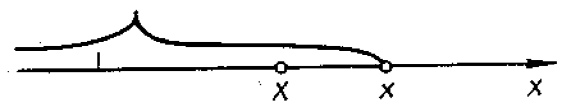

Рис. 7.5

Из сказанного можно сделать выводы, что:

1) функция распределения есть неотрицательная функция, заключенная между нулем и единицей:

$$0 \leqslant F(x) \leqslant 1; \quad (7.47)$$

2) функция распределения есть неубывающая функция своего аргумента

$$F(x_1) \leqslant F(x_2), \text{ если } x_1 < x_2;$$

3) функция $F(+\infty)=1$ при $x=+\infty$, $F(-\infty)=0$, при $x=-\infty$;

4) вероятность того, что случайная величина X принимает значения, лежащие в интервале $[a, b]$, равна разности значений функции распределения в концах интервала

$$p(a \leqslant X \leqslant b)=F(b)-F(a). \qquad (7.48)$$

Графическое выражение функции распределения приведено на рис. 7.6.

7.6. ПЛОТНОСТЬ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ НЕПРЕРЫВНОЙ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ

С помощью функции распределения задавать непрерывную случайную величину не всегда удобно, так как по функции распределения трудно судить о характере распределения случайной величины в небольшой окрестности той или иной точки числовой оси. Более наглядной в этом смысле является дифференциальная функция распределения, называемая плотностью вероятности или плотностью распределения.

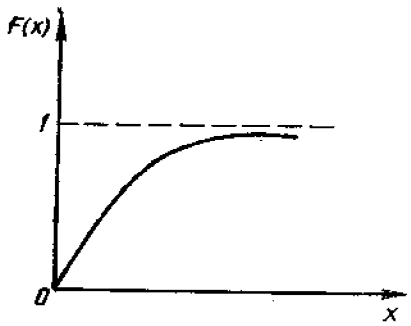

Рис. 7.6

Плотность распределения можно записать

$$f(x)=p(x)=\frac{dF(x)}{dx}=F'(x), \qquad (7.49)$$

т. е. это производиая от функции распределения.

Есть и другое определение плотности вероятности непрерывной случайной величины X, под которой понимают предел отношения вероятности попадания этой величины в бесконечно малый интервал ее возможных значений к величине этого интервала.

$$f(x)=p(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{[x<X<(x+\Delta x)]}{\Delta x}. \qquad (7.50)$$

Плотиость вероятиости показывает, насколько часто данная случайиая величина принимает значения вблизи рассматриваемой точки (в интервале $\Delta x \to 0$). Если обозначить Δx через dx, то уравнение (7.50) можно записать в виде

$$p[x<X<(x+dx)]=p(x)dx, \qquad (7.51)$$

где $p(x)dx$ — элемеит вероятности, обозначающий вероятность попадания случайной величины в участок между x и $x+dx$ (рис. 7.7).

К элементу вероятности применимы все теоремы, справедливые для вероятностей событий. С учетом малости элемента вероятиости операцию суммирования заменяют операцией интегрирования. Из выражения (7.49) следует, что плотность вероятности — это производная функции распределения. Поэтому зависимость

плотности вероятности от независимой переменной x называют *дифференциальной функцией распределения* или дифференциальным законом распределения. Эта функция (рис. 7.7), в отличие от интегральной, существует только для непрерывной случайной величины. Кривая, изображающая плотность распределения случайной величины, называется *кривой распределения*. Она располагается над осью абсцисс, так как возможные значения плотности вероятности лежат в пределах от 0 до $+\infty$.

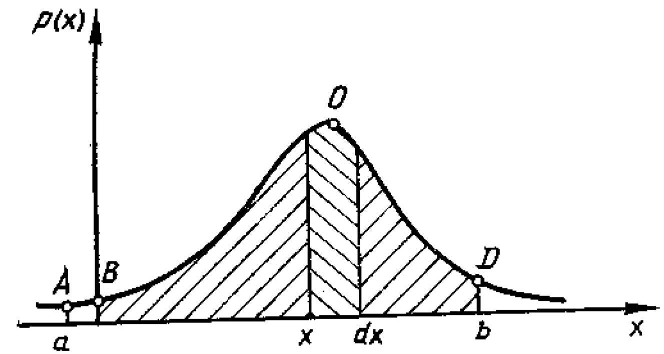

Рис. 7.7

Если известен закон распределения, то можно определить вероятность того, что случайная величина X примет значения в интервале $[a, b]$. Возьмем элементарный участок dx, примыкающий к точке x. Вероятность того, что случайная величина попадет в dx, равна $p(x)dx$. Геометрически это площадь элементарного прямоугольника с основанием, равным dx. В соответствии с теоремой сложения вероятностей несовместных событий вероятность того, что случайная величина X попадет в пределы между a и b равна сумме вероятностей попадания во все отдельные участки dx, т. е.

$$p(a \leqslant X \leqslant b)=\int_a^b p(x)dx. \qquad (7.52)$$

Геометрически вероятность попадания случайной величины X в отрезок $[a, b]$ равна площади кривой распределеиия, опирающейся на этот участок (см. рис. 7.7).

Вероятность же попадания случайной величины X в интервал $[-\infty, +\infty]$ равна 1, т. к. попадание в столь неограниченный интервал — событие достоверное:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p(x)dx=1. \qquad (7.53)$$

Числовые характеристики непрерывной случайной величины используются так же как и для дискретных случайных величин.

Математическим ожиданием непрерывной случайной величины называют величину, определяемую по формуле

$$M(X)=\int_a^b xp(x)dx. \qquad (7.54)$$

Дисперсией называют величину, определяемую по формуле

$$D(X)=\int_a^b [x-M(X)]^2 p(x)dx. \qquad (7.55)$$

Корень квадратный из дисперсии называется средним квадратическим отклонением

$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}. \qquad (7.56)$$

Если возможные значения случайной величины принадлежат всей оси, то в формулах (7.54), (7.55) a и b заменяют соответственно на $-\infty$ и $+\infty$.

7.7. ЗАКОНЫ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ НЕПРЕРЫВНОЙ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ

Для построения кривой распределения какой-либо случайной величины на основании опытных данных нужно иметь достаточно большое их число. На практике часто случайная величина подчиняется определенному закону распределения. При этом для полного представления случайной величины достаточно определить $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$.

Наиболее часто в метрологии встречаются два закона: закон равномерного и закон нормального распределения случайной величины.

Равномерное распределение. Если заранее известно, что возможные значения случайной величины лежат в определенном интервале, например, $[a-b,\ a+b]$, обладают одной и той же плотностью вероятности, то говорят, что случайные величины подчиняются равномерному закону распределения.

Дифференциальный закон распределения вероятности такой случайной величины выражается равенством:

$$p(x)=p=\text{const} \text{ при } (a-b)\leqslant x\leqslant(a+b);$$

$$p(x)=0 \text{ при } x<(a-b),\ x>(a+b). \qquad (7.57)$$

График равномерного распределения показан на рис. 7.8.

Он имеет вид прямоугольника с основанием $(a-b)-(a+b)=2b$, высота которого равна плотности вероятности p.

Все возможные значения X находятся в интервале $2b$, следовательно, попадание случайной величины в этот интервал есть событие достоверное, и его вероятность равна 1.

Площадь кривой распределения есть вероятность попадания случайной величины X в заданный интервал $2b$, т. е.

$$p[(a-b)\leqslant X\leqslant(a+b)]=\int_{a-b}^{a+b} p(x)dx=2bp=1,$$

откуда

$$P(x)=\frac{1}{2b}.$$

Математическое ожидание выразится

$$M(X)=\int_{a-b}^{a+b} x\frac{1}{2b}\,dx=a. \qquad (7.58)$$

Дисперсия определится по формуле

$$D(X)=\int_{a-b}^{a+b}(x-a)^2\frac{1}{2b}\,dx=\frac{b^2}{3}, \qquad (7.59)$$

а среднее квадратическое отклонение

$$\sigma(X)=b/\sqrt{3}.$$

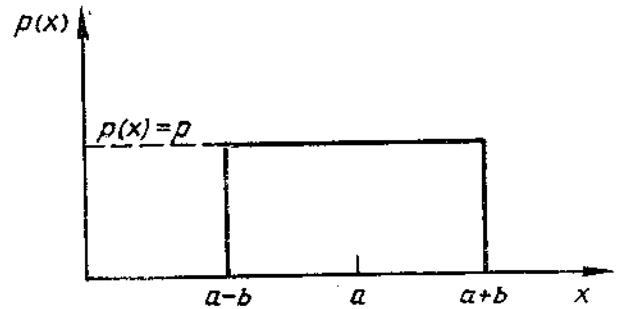

Рис. 7.8

Примером случайной величины с равномерным распределением могут служить ошибки отсчета между соседними делениями шкалы прибора. Здесь интервалу $2b$ соответствует цена деления шкалы.

Нормальное распределение. С помощью закона нормального распределения описывают распределение случайной величины, значения которой группируются около среднего значения и появляются с определенными частотами. Кривая, описывающая эти частоты, имеет колоколообразную форму и называется *кривой нормального распределения.* Это распределение имеет место в том случае, когда на исследуемую величину воздействуют многие случайные факторы, каждый из которых сам по себе незначителен, а в целом появляется отклонение величины от ее среднего значения.

Например, при тщательном проведении многократных измерений величины полученные результаты будут группироваться вокруг какого-то значения, причем значения, близкие к среднему, будут встречаться чаще значений, отличающихся от него, и чем больше отклонение, тем оно реже встретится.

Другим примером может служить стрельба из орудия по мишени. Если произвести несколько выстрелов, то не все снаряды попадут в центр мишени, но тем не менее большинство из них будет вблизи центра, в некоторой области. Теоретически же все снаряды должны были попасть в центр мишени, но этого не происходит. Следовательно, и в этом случае действует система определенных факторов.

В процессе приемки деталей, например валов, изготовленных на токарном станке, оказывается, что результаты измерения их диаметров будут близки к номинальному размеру в большинстве случаев и лишь отдельные результаты будут существенно отличаться от номинального размера.

Таким образом, во всех рассмотренных примерах действуют определенные факторы, которые поддаются достаточно строгому математическому описанию, т. е. указанная выше кривая нормального распределения имеет параметры и может быть описана уравнением. Она известна под многими названиями: кривая погрешностей, вероятностная кривая, нормальный закон, кривая Гаусса.

Нормальную кривую описывает математическое выражение

$$y=p(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\,e^{-\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma^2}}, \qquad (7.60)$$

где σ — среднее квадратическое отклонение (СКО); x — независимая переменная; $y=p(x)$ — плотность вероятности; $M(X)=m_x$ — математическое ожидание случайной величины; $e=2{,}71828$ — основание натурального логарифма; $\pi=3{,}14159$.

Нормальным называют распределение случайной величины, которое характеризуется уравнением (7.60). Из него очевидно, что нормальное распределение определяется двумя параметрами: m_x и σ. Достаточно знать эти параметры, чтобы задать нормальное распределение. Основные формулы, определяющие это распределение: $M(X)=m_x$, $D(X)=\sigma^2$.

7.8. ХАРАКТЕРИСТИКИ НОРМАЛЬНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Изучение кривых нормального распределения показывает, что они имеют симметричный колоколообразный вид (рис. 7.9).

Максимальная ордината кривой *1* равна $p(x_1)=\frac{1}{\sigma_1\cdot\sqrt{2\pi}}$

а кривой $2-p(x_2)=\frac{1}{\sigma_2\sqrt{2\pi}}$. Эти ординаты соответствуют точке $x=m_x$. Точка m_x называется центром кривых распределения и центром рассеивания.

С удалением от точки m_x плотность распределения уменьшается и при $x=\pm\infty$ кривая асимтотически приближается к оси

абсцисс. Если изменить положение точки m_x, кривая распределения сместится вдоль оси абсцисс, не изменив своей формы, т. е. центр рассеивания характеризует положение кривой распределения на оси абсцисс (рис. 7.10). Размерность m_x та же, что и размерность случайной величины X.

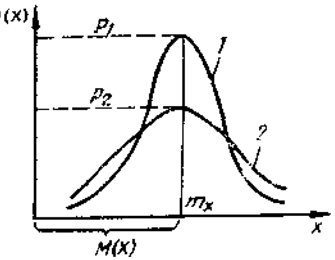

Рис. 7.9

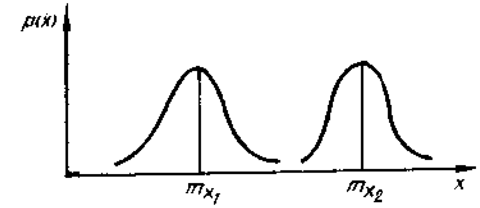

Рис. 7.10

Параметр σ есть характеристика рассеивания. Он характеризует форму кривой распределения. Так как площадь кривой распределения всегда равна 1, то при увеличении σ кривая распределения становится более плоской ($\sigma_2>\sigma_1$) (см. рис. 7.9), а при уменьшении σ — вытягивается. Размерность параметра σ та же, что и размерность случайной величины X.

Нормальное распределение с произвольными параметрами m_x и $\sigma(\sigma>0)$ называется общим.

Если же в формуле (7.60) вместо случайной величины ввести так называемую нормированную случайную величину

$$t=\frac{x-m_x}{\sigma}, \qquad (7.61)$$

то она также будет распределена по нормальному закону с центром распределения m_x, абсцисса которого $m_x=0$, а $\sigma=1$. Поэтому формулу (7.61), определяющую плотность вероятности, а также формулу функции распределения величины t можно записать так (рис. 7.11):

$$p(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{t^2}{2}}; \qquad (7.62)$$

$$F(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{t} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt. \qquad (7.63)$$

Определенный интеграл с переменным верхним пределом, имеющий вид

$$\Phi(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{t} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt \qquad (7.64)$$

и дающий значение площади под кривой плотности вероятности, называют функцией Лапласа.

Для нее справедливы следующие равенства: $\Phi(-\infty)=-0{,}5$; $\Phi(0)=0$; $\Phi(+\infty)=0{,}5$; $\Phi(-t)=-\Phi(t)$.

Функция распределения $F(t)$ связана с функцией Лапласа формулой

$$F(t)=0{,}5+\Phi(t). \qquad (7.65)$$

Эта формула позволяет при наличии таблицы значений $\Phi(t)$, соответствующих различным значениям t, рассчитать $F(t)$. Таблицы плотности вероятностей $p(t)$ и функции $\Phi(t)$ нормированной случайной величины, распределенной по нормальному закону, дают возможность найти плотность вероятности $p(x)$ и

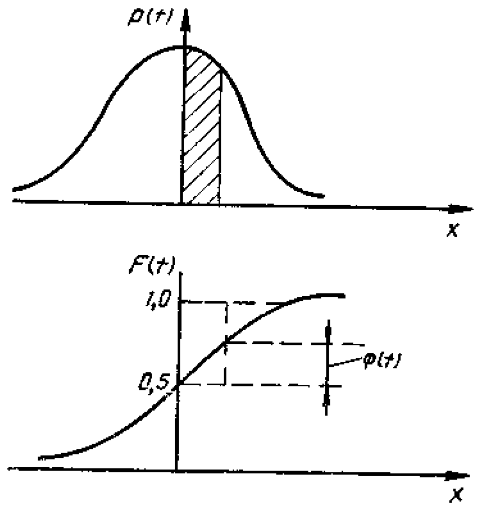

Рис. 7.11

значения функции $F(x)$ любой случайной величины, распределенной по нормальному закону, если известны значения ее центра распределения m_x и параметр σ.

Соответствующие формулы будут:

$$p(x)=p\left(\frac{x-m_x}{\sigma}\right)=p(t),$$
$$F(x)=F\left(\frac{x-m_x}{\sigma}\right)=F(t)=0{,}5+\Phi(t). \qquad (7.66)$$

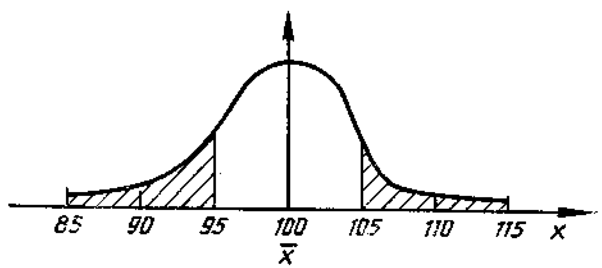

Рис. 7.12

Пример 1. Техническими условиями на изготовление некоторого типа резисторов было установлено, что величина сопротивления была 100 Ом ±5 Ом. Для оценки партии резисторов из нее сделали случайную выборку объемом $n=50$ резисторов. Среднее значение величины сопротивления получено $\bar{x}=100$ Ом, среднее квадратическое отклонение $\sigma=\pm 5$ Ом. Сколько процентов сопротивлений в партии будет забраковано при сплошной проверке?

Решение. Найдем значение нормированной случайной величины t по формуле $t=\frac{\max|x_i-\bar{x}|}{\sigma}$, где $x_{\max}=100-5=95$ (Ом), $x_{\max}=100+5$ (Ом). Откуда:

$$t_{\max}=\frac{100-95}{5}=1; \qquad t_{\min}=\frac{100-105}{5}=-1.$$

По табл. приложения получим $\Phi(t_{\min})=-0{,}3413$, $\Phi(t_{\max})=+0{,}3413$, таким образом, вероятность появления брака составит: $1-[\Phi(t_{\max})-\Phi(t_{\min})]=1-0{,}6826=0{,}3174$, или 31,74 %.

Решение задачи можно представить графически (рис. 7.12). На рисунке представлены нижний и верхний пределы по техническим условиям. Они расположены на расстоянии, равном $t\sigma$. Площадь частей, лежащих вне указанных пределов, и есть доля тех резисторов в партии, которые должны быть забракованы. На их долю из решения приходится 31,74 %. Это и есть ожидаемая доля негодных изделий.

Пример 2. Используя условие примера 1, допустим, что пределы составляют ±6 Ом. Какова в этом случае вероятность брака или доля неприемлемых резисторов?

Решение. Для нахождения этой доли можем воспользоваться таблицей приложения 3. В ней приведены площади под кривой нормального распределения от $-\infty$ до точки, отстоящей на t средних квадратических отклонений от математического ожидания m_x или среднего значения $\bar{x}$. Эти таблицы составлены с учетом формулы (7.65).

Предварительно найдем величину $t=(106-100)/5=1{,}2$. В теории отрицательная бесконечность представляет собой точку, расположенную на бесконечно большом расстоянии влево по оси (рис. 7.13), где кривая нормального распределения пересекается с осью абсцисс. В действительности, с достаточной для практики точностью эта точка отстоит на 3σ от среднего значения.

По таблице приложения 3 находим, что ожидаемая доля резисторов в партии, величина которых не выходит за верхний предел, равна 0,8849, отсюда доля резисторов, величина которых выходит за верхний предел, равна $1-0{,}8849=0{,}1151$, или 11,51 %. Аналогично для нижнего предела $t=-1{,}2$ и доля резисторов, не достигающих нижнего предела, также равна 11,51 %, откуда общая доля неприемлемых резисторов составит $11{,}51+11{,}51=23{,}02$ %.

Пример 3. Найти вероятность того, что случайная величина X с центром распределения $m_x=2{,}0$ и $\sigma=1{,}5$ находится в пределах $2{,}0-3{,}0\leqslant X\leqslant 2{,}0+3{,}0$; $-1{,}0\leqslant X\leqslant 5$.

Решение. Значения t_1 и t_2 будут:

$$t_1=\frac{x_1-m_x}{\sigma}=\frac{-1-2}{1{,}5}=-2{,}0;$$

$$t_2=\frac{x_2-m_x}{\sigma}=\frac{5-2}{1{,}5}=2{,}0,$$

Откуда $p[-1\leqslant X\leqslant 5]=p[-2<t<2]=2\Phi(2)$. Воспользовавшись приложением 1, находим $\Phi(2)=0{,}477$, откуда $p[-1\leqslant x\leqslant 5]=0{,}954=95{,}4\ \%$.

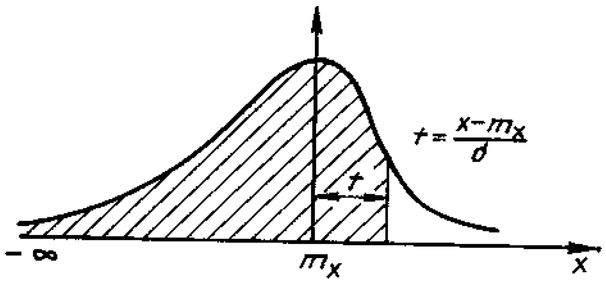

Рис. 7.13

Построение теоретической кривой нормального распределения проводится с целью получения графической информации и характера распределения. Для ее построения используется известная формула (7.62) плотности вероятности, в которой среднее значение равно нулю, а среднее квадратическое отклонение — единице. Можно также показать, что площадь под кривой, описываемой уравнением (7.62), также равна единице. Следовательно, характеристическим свойством распределения вероятностей является то, что сумма всех вероятностей равна единице.

В таблице приложения 2 содержатся значения плотности вероятностей для различных значений t. Эти значения относятся к правой половине распределения, но так как нормальная кривая симметрична, то отрицательным значениям t соответствуют те же значения плотности, что и положительным. Эти значения плотности вероятностей пропорциональны $p(t)$, которая представляет ординату нормальной кривой для любых значений t.

Большое значение уравнения (7.62) состоит в том, что оно дает относительные частоты, т. е. плотности вероятности и поэтому может быть использовано для построения теоретической кривой, соответствующей гистограмме с n значениями при среднем квадратическом отклонении σ.

Продолжим рассмотрение примера 1. Случайная выборка была равна 50, т. е. общая частота $n=50$, а среднее квадратическое отклонение $\sigma=5$ Ом. Если уменьшить уравнение (7.62) на n/σ, то получим абсолютную частоту, т. е.

$$y=\frac{n}{\sigma}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{t^2}{2}}\right) \qquad (7.67)$$

или

$$y=\frac{50}{5}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{t^2}{2}}\right).$$

Как отмечалось, выражение в скобках может быть определено для различных значений t (приложение 2). Вычислив эти значения, получим табл. 7.6, которая дает абсолютные значения y для различных t. По полученным значениям можно построить кривую нормального распределения (рис. 7.14).

Таблица 7.6

x_i	$t_i=\frac{x_i-m_x}{\sigma}$	$p_i(t)$	$y=\frac{n}{\sigma}p_i(t)$	x_i	$t_i=\frac{x_i-m_x}{\sigma}$	$p_i(t)$	$y=\frac{n}{\sigma}p_i(t)$
85	—3,00	0,004	0,04	101	0,20	0,391	3,91
86	—2,80	0,008	0,08	102	0,40	0,368	3,68
87	—2,60	0,014	0,14	103	0,60	0,333	3,33
88	—2,40	0,022	0,22	104	0,80	0,290	2,90
89	—2,20	0,035	0,35	105	1,00	0,242	2,42
90	—2,00	0,054	0,54	106	1,20	0,195	1,95
91	—1,80	0,079	0,79	107	1,40	0,150	1,50
92	—1,60	0,111	1,11	108	1,60	0,111	1,11
94	—1,40	0,150	1,50	109	1,80	0,079	0,79
93	—1,20	0,195	1,95	110	2,00	0,054	0,54
95	—1,00	0,242	2,42	111	2,20	0,035	0,35
96	—0,80	0,290	2,90	112	2,40	0,022	0,22
97	—0,60	0,333	3,33	113	2,60	0,014	0,14
98	—0,40	0,368	3,68	114	2,80	0,008	0,08
99	—0,20	0,391	3,91	115	3,00	0,004	0,04
100	0,00	0,399	3,99				

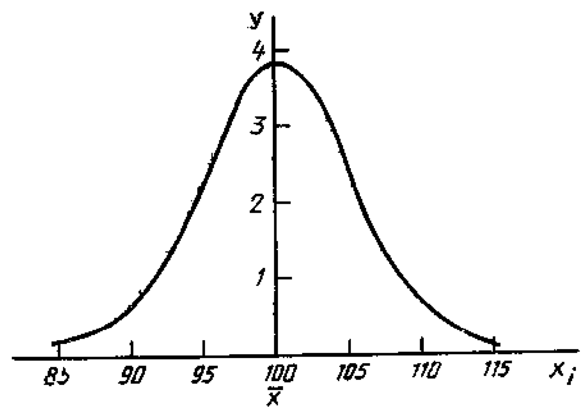

Рис. 7.14

Очевидно, что ордината y, указанная в таблице, показывает количество резисторов определенного значения в выборке из 50 шт. Например, если требуется найти теоретическое или расчетное число резисторов, имеющих величину 101 Ом, то в соответствующей этому значению строчке находим $y=3{,}91\approx4$, так как количество резисторов не может выражаться дробью.

В заключение, следует выделить еще одно важное обстоятельство: изучение нормальной кривой показало, что 99,72 % площади под кривой лежит в пределах шести средних квадратических отклонений, т. е. по три средних квадратических отклонения в каждую сторону. Чтобы убедиться в справедливости данного обстоятельства, воспользуемся формулой (7.64) и приложением 1, составленным по значениям $t_i=(x_i-m_x)/\sigma$. Примем $t_1=\mp\sigma$, $t_2=\mp2\sigma$, $t_3=\mp3\sigma$. Из приложения найдем $\Phi(t_1)=\pm0{,}3413$, $\Phi(t_2)=\pm0{,}4772$, $\Phi(t_3)=0{,}4986$ или с учетом симметрии: $2\Phi(t_1)=0{,}6826$, $2\Phi(t_2)=0{,}9544$, $2\Phi(t_3)=0{,}9972$.

Другими словами, вероятность того, что случайная величина окажется в пределах $\mp\sigma=68{,}26$ %, $\mp2\sigma=95{,}44$ %, $\mp3\sigma=99{,}72$ %, а за пределами $\mp3\sigma$ окажется 0,28 % из общего числа. Сказанное выше можно проиллюстрировать на рис. 7.15.

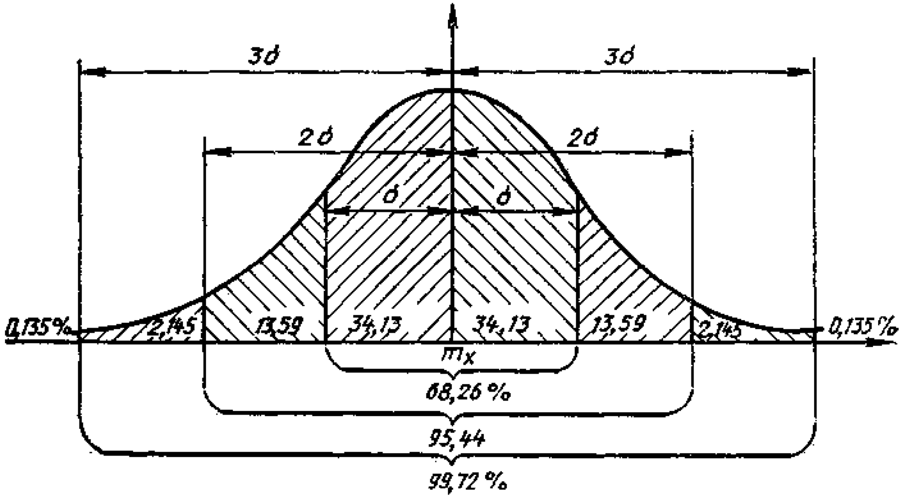

Рис. 7.15

Из анализа также очевидно, что между 0 и $\mp\sigma$ окажется 68,26%, между $\mp1\sigma$ и $\mp2\sigma$ — 27,18% и между $\mp2\sigma$ и 3σ — 4,29 % всех результатов. Это обстоятельство имеет важное практическое значение и носит название правила трех сигм.

7.9. ВЫРАВНИВАНИЕ СТАТИСТИЧЕСКИХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ

При использовании вероятностных методов оценки полученных результатов важной задачей является нахождение функции распределения по данному статистическому ряду. Такая операция

называется выравниванием статистического распределения, а искомую функцию распределения $F(x)$, или плотность распределения $f(x)=p(x)$ называют выравнивающими. При ее выборе стараются найти такой теоретический закон распределения, который выражает самые существенные свойства изучаемой статистической совокупности.

Вид гистограммы или полигона, анализ статистических характеристик позволяют сделать вывод о возможности выравнивания статистического ряда с помощью того или иного закона распределения.

Симметричный вид гистограммы позволяет предположить, что гистограмма выравнивается нормальной кривой.

Вместе с тем, решая задачу выравнивания, исходят не только из теоретических соображений, но и из физической природы изучаемого явления.

После того, как найдены значения параметров распределения, проводят сравнение теоретической функции распределения $F(x)$ и эмпирической $\widehat{F}(x)$. Для наглядности строят графики $F(x)$ и $\widehat{F}(x)$. Сравнение графиков показывает, насколько теоретический закон распределения удовлетворительно отражает экспериментальные данные. Если расхождение между $F(x)$ и $\widehat{F}(x)$ невелико, можно считать, что $F(x)$ определена правильно, и задача выравнивания статистического распределения решена.

Выравнивающая функция распределения сглаживает все те случайные отклонения, свойственные $F(x)$, которые происходят из-за ограниченного объема наблюдений.

Выравнивание статистического распределения проводится в следующем порядке:

1) выбирают теоретический закон распределения, зависящих от k параметров: $F(x_1, a_1, a_2, \ldots, a_k)$ или $f(x, a_1, a_2, \ldots, a_k)$;

2) вычисляют параметры распределения. Оценку приводят к решению системы k уравнений $M_i=\widehat{M}_i$;

3) строят графики выравнивающей функции распределения $F(x)$ или плотности $f(x)=p(x)$ для значений x_i, где x_i — варианта, или для значений x_{i0}, где x_{i0} — середина интервала (для интервального вариационного ряда);

4) сравнивают графики $F(x)$ и $\widehat{F}(x)$ или $f(x)=p(x)$ и гистограммы.

Пример. По данным примера 3 в разд. 7.8 выравнить статистический ряд.

Решение. Заданный статистический ряд представлен в виде гистограммы на рис. 7.16. Рассматривая гистограмму, имеющую колоколообразную форму, можно предположить, что для нее в качестве выравнивающей кривой подойдет нормальная кривая. Предположим, что закон распределения измерений в ряде образцов, при измерении моментов, необходимых для запирания коробки радиопередатчика — нормальный. Плотность его распределения равна:

$$f(x)=p(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\ e^{-\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma^2}}.$$

Значения $m_x=\overline{x}=0{,}59$; $\sigma=0{,}094$.

По данным, приведенным в примере 3, (с. 95), вычислим $f(x)$ для середин интервалов. Для этого введем переменную $t=(x_i-\overline{x})/\sigma$ и, используя свойство нормального распределения $f(x)=1/\sigma f(t)$, по приложению 2 найдем значения $f(t)$. В случае использования интервалов применяют зависимость $f(x)=h/\sigma f(t)$, где h — ширина интервала, равная 0,06.

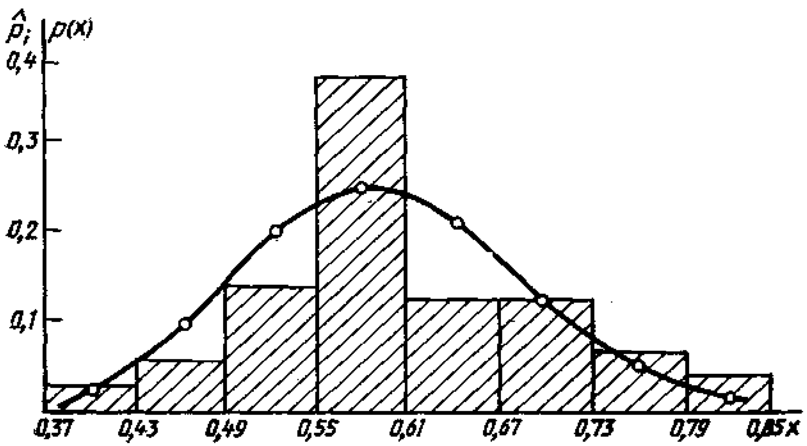

Рис. 7.16

Для удобства, вычисления сведем в табл. 7.7.

Таблица 7.7

Середины интервалов	$t_i=\frac{x_{i,o}-\overline{x}}{\sigma}$	$f(t)$	$\frac{h}{\sigma}f(t)$	$F(x)=F(t)$
0,40	−2,02	0,052	0,033	0,022
0,46	−1,38	0,154	0,098	0,084
0,52	−0,74	0,303	0,193	0,230
0,58	−0,11	0,396	0,253	0,456
0,64	+0,53	0,347	0,221	0,702
0,70	+1,17	0,201	0,128	0,879
0,76	+1,81	0,078	0,049	0,965
0,82	+2,45	0,020	0,013	0,993

В ту же таблицу занесем значения теоретической функции $F(x)$ распределения $F(x)=F(t)$, найденные по таблицам функции Лапласа (приложение 3), где $F(t)=0{,}5+\Phi(t)$ (рис. 7.17). Для построения значений $\widehat{F}(x)$ и $F(t)$ воспользуемся данными на с. 95 и значениями $F(x)$ таблицы.

7.10. ПОНЯТИЕ О КРИТЕРИЯХ СОГЛАСИЯ

В предыдущем разделе по данным наблюдения были построены кривые нормального распределения $f(x)$ и функции распределения — теоретическая $F(t)$ и эмпирическая $\widehat{F}(x)$. Близость теоретической функции к эмпирической, как показано на рис. 7.17, позволяет предположить, что теоретические кривые

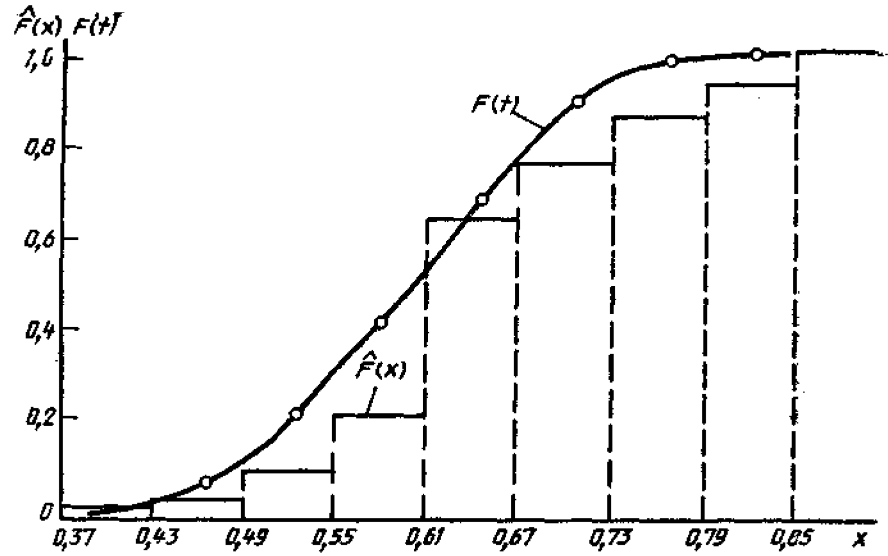

Рис. 7.17

удовлетворительно описывают имеющиеся данные, полученные опытным путем. Однако теоретический и эмпирический законы распределения могут существенно отличаться в силу случайных причин, например, малым объемом выборки, неудачно выбранным способом группирования статистических данных, а также в силу неверно выбранного предположения о виде теоретического закона распределения. В этих случаях выравнивающая кривая будет значительно расходиться с экспериментальным распределением.

Для строгого вывода о расхождении теоретического и эмпирического законов используются критерии согласия, под которыми понимают критерий гипотезы о том, что генеральная совокупность имеет теоретическое распределение предполагаемого типа.

Критерии согласия дают возможность сделать выводы о согласовании наблюдавшихся значений случайной величины с предполагаемой гипотезой о виде ее функции распределения.

Суть критерия согласия заключается в следующем. Вводят меру расхождения теоретического и эмпирического распределений, т. е. это будет наибольшее значение разности по абсолютной величине между функциями распределения $F(x)$ и $\widehat{F}(x)$

$$u=\sqrt{n}\cdot\max|F(x)-\widehat{F}(x)|. \quad (7.68)$$

Мера расхождения u является случайной величиной, значения которой зависят от наблюдавшихся значений $x_1, x_2, \ldots$ и объема наблюдений n.

Пусть закон распределения u известен и задан в виде

$$p(u)=P(U>u), \quad (7.69)$$

где $p(u)$ — вероятность того, что случайная величина u примет значение больше заданного $p(u)=1-F(u)$, а $F(u)=P(U<u)$.

Зададимся малым числом $\alpha>0$, таким что можно считать практически невозможным появление события $(u>u_\alpha)$, состоящего в том, что величина расхождения u примет значение, большее u_α (u_α — значение расхождения, отвечающего заданному α):

$$P(U>u_\alpha)=\alpha,$$

где α — называется уровень значимости критерия, u_α — предел значимости.

Если для изучаемой совокупности вычислено значение расхождения $u_э$ и окажется $u_э>u_\alpha$ то это означает, что произошло событие, вероятность которого настолько мала, что его появление не может быть объяснено случайными причинами. Иначе говоря, практически произошло невозможное событие, которое можно объяснить только одним: расхождение между $F(x)$ и $\widehat{F}(x)$ вызвано неправильным подбором $F(x)$, т. е. выдвинутая гипотеза о виде закона распределения неверна и не подтверждается опытом.

Обычно рассуждают так. Задаваясь малым значением $\alpha=P(U>u_\alpha)$, определяют вероятность события $(U>u_\alpha)$ так, что оно практически невозможно. Вычисляют для исследуемой статистической совокупности значение $u_э$ и находят соответствующую ему вероятности $P(u_э)$. Если окажется, что эта вероятность меньше вероятности практически невозможного события $P(u_э)<\alpha$, то это означает, что расхождение неслучайно и вызвано неверным выбором теоретического закона распределения. Следовательно, выдвинутую гипотезу о законе распределения следует отклонить как противоречащую опытным данным.

Значения α выбирают обычно равными 0,05; 0,02; 0,01. Задание уровня значимости α определяет вероятность ошибочного отбрасывания правильной гипотезы.

Порядок проверки гипотезы о виде закона распределения с помощью критериев согласия может быть следующий:

1) выбирают меру расхождения между теоретическим и эмпирическим законами распределения u. Закон распределения $P(U>u)$ должен быть известен;

2) задают уровень значимости критерия α;

3) вычисляют меру расхождения для исследуемого статистического распределения $u_э$;

4) находят табличное значение u_α, отвечающее заданному уровню значимости $P(U>u_\alpha)=\alpha$;

5) делают вывод относительно проверяемой гипотезы о согласованности теоретического и эмпирического распределений:
если $u_э>u_\alpha$ — гипотеза отклоняется;
если $u_э<u_\alpha$ — гипотеза принимается.

Критерий согласия Пирсона (критерий χ^2) имеет множество применений и используется достаточно часто при интервальной оценке и при числе $n\geq 50$. В критерии Пирсона расхождение задают в виде

$$u=\chi^2=\sum_{1}^{r}\frac{(m_i-np_i)^2}{np_i}, \quad (7.70)$$

где m_i — частота; p_i — вероятность попадания в i-й интервал; r — число интервалов; n — объем наблюдений.

При $n\to\infty$ случайная величина $u=\chi^2$ имеет распределение Пирсона с $k=r-3$ степенями свободы, где k — число параметров распределения, подлежащих оценке по опытным данным. (Рассмотрение вопроса о степенях свободы выходит за пределы настоящего пособия.) Таблица функции $p(\chi^2)=p(u>\chi^2)$ приведена в приложении 4.

Проверку гипотезы о согласованности теоретического и эмпирического распределений с помощью критерия Пирсона осуществляют в следующем порядке:

1) результаты наблюдений $x_1, x_2, \ldots, x_n$ группируют в интервальный вариационный ряд. Объем наблюдений должен быть большим ($n\geq 50$);

2) строят гистограмму или полигон;

3) выдвигают гипотезу о виде закона распределения и определяют его параметры;

4) задают уровень значимости критерия α;

5) определяют теоретическую вероятность попадания случайной величины X в каждый интервал $p_i=F(x_{i+1})-F(x_i)$ или $\hat{f}(x)=p(x)=h/\sigma f(t_i)$;

6) определяют величину расхождения $\chi^2_э$;

7) определяют число степеней свободы $s=k-r-1$. Для нормального распределения принимают: $s=r-3$;

8) по таблице приложения распределения $P(\chi^2)$ находят значение χ^2_α, по заданному уровню значимости α и числу степеней свободы s;

9) делают вывод о проверяемой гипотезе:

если $\chi^2_э > \chi^2_\alpha$ — гипотезу отвергают;

если $\chi^2_э < \chi^2_\alpha$ — гипотезу принимают.

Пример. Проверить гипотезу о согласованности эмпирического распределения отклонения моментов, требуемых для запирания коробки радиопередатчика. Данные взяты из примера 3 (см. с. 95, 114) и сведены в табл. 7.8. Учтем, что использование критерия Пирсона требует, чтобы $m_i \geqslant 5$, поэтому объединим 1-й со 2-м, 6-й с 7-м интервалами.

Таблица 7.8

Границы интервалов x_i-x_{i+1}	Частоты m_i	np_i	(m_i-np_i)	$(m-np_i)^2$	$\frac{(m_i-np_i)^2}{np_i}$
0,37—0,49	5	6,7	—1,7	2,89	0,43
0,49—0,55	7	9,6	—2,6	6,76	0,70
0,55—0,61	21	12,6	8,4	70,56	5,60
0,61—0,67	6	11,0	—4 4	19,36	1,76
0,67—0,73	6	6,4	—0,4	0,16	0,02
0,73—0,85	5	3,1	+1,9	3,61	1,16
				Итого	9,67

Число степеней распределения: $k=r-3=6-3=3$. Зададимся уровнем значимости критерия $\alpha=0,01$. По приложению 4 находим значение $\chi^2_э$. Оно равно 11,30. Так как $\chi^2_э < \chi^2_\alpha$, то гипотеза принимается, нормальный закон согласуется с эмпирическим распределением.

При малом числе наблюдений для оценки нормальности пользуются статистической функцией распределения результатов наблюдений. Для ее построения полученные в ходе эксперимента данные группируют в вариационный ряд, т. е. располагают члены его в порядке возрастания или убывания. Иногда этот ряд называют ранжированным, т. е. $x_1 \geqslant x_2 \leqslant x^3 \leqslant \ldots \geqslant x_n$.

Статистическую функцию распределения $F(x_i)$ определяют по формуле

$$F(x_i)=\frac{i}{n+1}, \quad i=1,2,\ldots,n. \tag{7.71}$$

График функции $F(x_i)$ представляет собой ступенчатую линию, скачки которой соответствуют значениям вариационного ряда. Каждый скачок равен $1/(n+1)$, если все n членов ряда различны. Если же для некоторого i $x_i=x_{i+1}=\ldots=x_{i+k}$, то $F(x)$ в точке $x=x_i$ возрастет на $1(n+1)$, где k — число равных между собой членов ряда.

Для проверки нормальности распределения результатов наблюдений по таблице приложения 3 находят значения t_i, соответствующие значениям $F(x_i)$ статистической функции распределения $F(t_i)$, т. е. $F(x_i)=F(t_i)$. Но переменная t может быть определена через результаты наблюдений как $t_i=(x_i-\bar{x})/\sigma$ и если по точкам с координатами x_i, t_i построить график, то при нормальном распределении точки располагаются практически на одной прямой линии.

Если же в результате построения графика получится некоторая кривая линия, то гипотезу о нормальности распределения отвергают, как противоречащую опытным данным.

Пример. Получены результаты измерений ($n=19$) длины детали в мм. Проверить нормальность распределения результатов:

8,305	8,306	8,312	8,308
8,308	8,310	8,305	8,307
8,311	8,303	8,307	8,309
8,309	8,308	8,308	8,310
8,304	8,306	8,309	

Решение. Располагаем данные в вариационный ряд без повторяющихся по значению результатов и находим значения $F(x_i)$ по формуле (7.71).

Значение 8,303 располагается первым, поэтому $i=1$. Значение 8,304 располагается вторым, поэтому $i=2$. Значение 8,305 встречается дважды ($m_i=2$), поэтому $i=+2+2=4$. Значение 8,306 встречается дважды, поэтому $i=4+2=6$, аналогично проводится расчет i для всех последующих значений, т. е. практически считается накопленная частота m_i. Результаты вычислений $F(x_i)$ размещены в табл. 7.9.

Таблица 7.9

x_i	m_i	$m_i^{нак}$	$F(x_i)=F(t_i)$	t_i
8,303	1	1	0,05	—1,6449
8,304	1	2	0,10	—1,2816
8,305	2	4	0,20	—0,8416
8,306	2	6	0,30	—0,5244
8,307	2	8	0,40	—0,2533
8,308	4	12	0,60	0,2533
8,309	3	15	0,75	0,6745
8,310	2	17	0,85	1,0364
8,311	1	18	0,90	1,2816
8,312	1	19	0,95	1,6449

По значениям x_i и t_i строим график (рис. 7.18)

Очевидно, что отдельные точки располагаются очень близко к прямой, поэтому распределение результатов можно считать нормальным.

Данный способ является наиболее простым из всех рассмотренных, поэтому его целесообразно использовать при малом числе опытов (измерений).

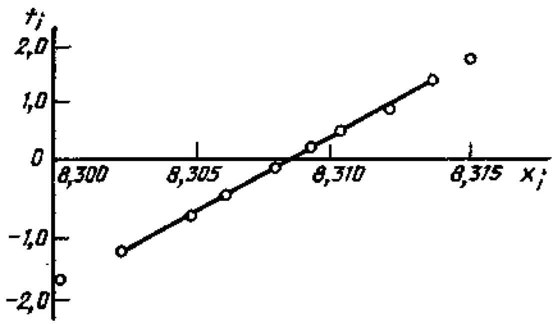

Рис. 7.19

7.11. ИНТЕРВАЛЬНЫЕ ОЦЕНКИ ПАРАМЕТРОВ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Рассмотренные оценки параметров называются точечными. Они дают оценку параметра в виде данного числа, указывающего как бы точку на числовой оси, в которой должно находиться значение неизвестного параметра. Такие точечные оценки используются только в случае большого числа наблюдений. Чем меньше объем выборки, тем легче допустить ошибку при выборе параметра. В таком случае важно не только получить значение X, но и определить, насколько эта оценка близка к истинному значению параметра, т. е. важно оценить величину ошибки с помощью интервала значений.

Следовательно, кроме точечной, необходима еще и интервальная оценка параметров. Суть ее в том, чтобы построить интервал значений, в котором с заданной вероятностью будет находиться искомый параметр распределения. Такой интервал называется *доверительным* $[x_н, x_в]$, а его границы — нижней и верхней доверительными границами. С вероятностью $p=1-\alpha$ доверительный интервал содержит неизвестное значение параметра

$$P\{x_н \leqslant X \leqslant x_в\} = 1-\alpha, \; \alpha \ll 1. \tag{7.72}$$

Вероятность P называют доверительной, а величину α, как отмечалось, — уровнем значимости.

Определяя границы $x_н$, $x_в$, можно сказать, что с вероятностью $P=1-\alpha$ значение параметра находится внутри интервала $[x_н, x_в]$, а с вероятностью α интервал не содержит параметра X. Доверительный интервал, доверительная вероятность, объем выборки тесно связаны между собой и рассматриваются совместно.

При заданном объеме выборки большему значению доверительной вероятности отвечает более широкий доверительный интервал.

Обычно значениями доверительной вероятности задаются исходя из конкретных условий. Чаще всего выбирают $p=0{,}95$, $(\alpha=0{,}05)$, реже $p=0{,}90$ $(\alpha=0{,}10)$, $p=0{,}99$ $(\alpha=0{,}01)$.

Порядок получения интервальной оценки параметров распределения может быть следующий:

1) определяют точечную оценку математического ожидания, которым может быть выборочная средняя $\bar{x}$;

2) устанавливают закон распределения $\bar{x}$ или доказывают, что выборочная характеристика

$$t = \frac{\bar{x} - M(X)}{\sigma} \cdot \sqrt{n} \tag{7.73}$$

удовлетворяет нормальному закону распределения с параметрами $m_t=0$, $\sigma_t=1$;

3) задают доверительную вероятность $p=1-\alpha$;

4) находят верхнюю и нижнюю доверительные границы в соответствии с равенством

$$\left.\begin{aligned} F(x_н) &= \frac{\alpha}{2} = \frac{1-p}{2}\,; \\ F(x_в) &= 1 - \frac{\alpha}{2} = \frac{1+p}{2}\,; \end{aligned}\right\} \tag{7.74}$$

5) полученный доверительный интервал удовлетворяет условию

$$P[\bar{x} - \varepsilon \leqslant X \leqslant \bar{x} + \varepsilon] = 1-\alpha. \tag{7.75}$$

На практике для нахождения интервала используется соотношение $t_p = \varepsilon/\sigma$,

где t_p — аргумент функции Лапласа, отвечающий вероятности $(1+p)/2$, который в литературе называется квантилью нормального распределения.

Значения t_p могут быть найдены по таблице функции Лапласа (при заданной доверительной вероятности p):

$$\Phi(t_p) = \frac{1+p}{2} \quad \text{или} \quad 2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right) - 1 = p. \tag{7.76}$$

Можем также записать

$$\Phi(x) = \frac{1+p}{2}\,. \tag{7.77}$$

С учетом этого находят соответствующее вероятности $(1+p)/2$ значение $x=t_p$. В то же время

$$\varepsilon = t_p \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\,. \tag{7.78}$$

Поэтому доверительной вероятности p отвечает доверительный интервал, равный

$$\left[\, \bar{x} - t_p \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\,,\; \bar{x} + t_p \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \,\right]. \tag{7.79}$$

т. е. для t_p справедливо равенство

$$p(|t_p|<\varepsilon)=2\Phi(\varepsilon)-1 \qquad (7.80)$$

и полагая $2\Phi(\varepsilon)-1=p$, $\varepsilon=t_p$, где t_p — квантиль нормального распределения, отвечающий вероятности $\Phi(t_p)=(1+p)/2$, откуда следует с учетом (7.75)

$$p\left(\bar{x}-\frac{t_p\sigma}{\sqrt{n}}\leqslant X\leqslant\bar{x}+\frac{t_p\sigma}{\sqrt{n}}\right)=p, \qquad (7.81)$$

а доверительный интервал записан равенством (7.79).

Пример. Построить доверительный интервал для математического ожидания отклонения момента, требуемого для запирания коробки радиопередатчика (пример 3 с. 95), если $m_x=\bar{x}=0{,}59$, а $\sigma=0{,}09$ при доверительной вероятности $p=0{,}9$.

Решение. Так как гипотеза о нормальности закона распределения отклонений момента не противоречит опытным данным, то для нахождения доверительных интервалов воспользуемся формулами (7.76) и (7.81). Найдем значение квантиля распределения при $p=0{,}9$ (приложение 1):

$$n-1=50-1=49.$$

$\Phi(t_p)=\frac{1+0{,}9}{2}=0{,}95$ из таблиц с учетом $F(t)=\frac{1}{2}+\Phi(t_p)$ получим: $\Phi(t_p)=\Phi(t)-\frac{1}{2}=0{,}95-0{,}5=0{,}45$. Соответственно $t_p=1{,}65$.

Но $t_p=\frac{\varepsilon}{\sigma}\sqrt{n}$, откуда $\varepsilon=t_p\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=\frac{1{,}65\cdot0{,}09}{\sqrt{49}}=\frac{0{,}1494}{7}=0{,}021.$

Искомый интервал будет:

$$[0{,}59-0{,}021<X<0{,}59+0{,}021] \text{ или } [0{,}569<X<0{,}611].$$

Рассмотреный способ нахождения доверительных интервалов справедлив для достаточного большого числа наблюдений, так как вычисляемое по отношениям от среднего арифметического среднее квадратическое отклонение σ является лишь некоторым приближением к действительному значению среднего квадратического отклонения σ^*. Определение доверительного интервала при заданной вероятности приведенным выше способом оказывается тем менее надежным, чем меньше число наблюдений. Нельзя пользоваться формулами нормального распределения при малом числе наблюдений, если нет возможности теоретически на основе предварительных опытов с достаточным числом наблюдений определить σ для данного метода. Английский ученый Госсет (псевдоним Стъюдент) специально изучал вопрос о получении среднего арифметического из ограниченного числа результатов статистических наблюдений. Он установил для случайных величин, подчиняющихся нормальному распределению, формулу плотности вероятности $f(t)$ нормированной величины $\frac{x-X}{\sigma}=t$, имеющую вид

$$f(t)=\frac{\Gamma\left(\frac{l+1}{2}\right)}{\sqrt{e\pi}\,\Gamma\left(\frac{l}{2}\right)}\cdot\left(1+\frac{t^2}{l}\right)^{-\frac{l+1}{2}}, \qquad (7.82)$$

где $l=n-1$, n — число наблюдений, t — параметр, определяемый выражением $\frac{\Delta}{\sigma}\sqrt{n}$; $\Gamma\left(\frac{l}{2}\right)$ — гамма-функция, значение которой зависит от числа наблюдений.

Не вдаваясь в анализ (7.82), отметим, что вероятность того, что x отклоняется от X на величину в пределах $t_p\cdot\sigma_x$ определится интегральной функцией

$$p[-t_p\sigma_{\bar{x}}<x-X<+t_p\sigma_{\bar{x}}]=\int_{-t_p}^{+t_p}f(t)dt. \qquad (7.83)$$

Для практического применения этого распределения в приложении 5 даны значения t_p для различных доверительных вероятностей p и различного числа измерений n. При $n\to\infty$ распределение сходится к нормальному, которое рассмотрено выше.

Пример. Произведено шестикратное взвешивание изделия и получены следующие результаты: 101,361; 101,357; 101,352; 101,346; 101,344; 101,340 г. Определить доверительный интервал для среднего при доверительной вероятности, равной 0,99.

Решение. Находим среднее значение $\bar{x}=101{,}350$, среднее квадратическое отклонение результата

$$\sigma=\sqrt{\frac{\sum\limits_{1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{n-1}}\approx 8{,}1 \text{ (мг)}$$

и среднее квадратическое отклонение среднего арифметического

$$\sigma_{\bar{x}}=\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=\frac{8{,}1}{\sqrt{6}}=3{,}3 \text{ (мг)}.$$

В приложении 5 для $n=6$ и $p=0{,}99$, $t_p=4{,}06$. Доверительный интервал для среднего $t_p\cdot\sigma_{\bar{x}}=4{,}06\cdot3{,}3\approx13$ (мг), следовательно, $[101{,}337<X<101{,}363]$.

Вопросы для самопроверки

1. Объясните правомерность применения теории вероятности при обработке многократных измерений одной и той же величины. Дайте определения достоверных, невозможных и случайных величин с точки зрения теории вероятности. Дайте определение понятия «вероятность» и объясните способы ее вычисления.

2. Объясните, что выражает закон распределения случайных величин. В каком виде он выражается для дискретных и непрерывных случайных величин. Приведите примеры «ряда распределения», «статистического ряда», «многоугольника вероятности», «гистограммы», кривой распределения плотности вероятности случайных величин.

3. Зарисуйте стандартные аппроксимации согласно ГОСТ 8.011—72 и объясните их.

4. Объясните, как определить вероятность попадания случайной погрешности в заданный интервал; что такое доверительный интервал и доверительная вероятность? Приведите примеры.

5. Зарисуйте кривую закона нормального распределения случайных погрешностей. Объясните аксиомы случайных погрешностей.

6. Перечислите показатели точности измерения, стандартные формы представления результатов измерения.

7. Дискретные и непрерывные случайные величины: дайте определения, приведите примеры. Опишите способы выражения законов распределения (Гаусса, Пуассона, Стьюдента) в виде формул, графиков, таблиц.

8. Нормальный закон распределения случайных величин: приведите формулу, график, числовые характеристики, формулу для их вычисления.

9. Нормальный закон распределения случайных погрешностей: приведите его формулу, график, числовые характеристики.

ЗАДАЧИ И ПРИМЕРЫ К РАЗД. 7

1. При исследовании частоты появления отсчетов десятых долей интервала сантиметровых делений метра оказалось следующее распределение отсчетов миллиметров на 1000 отсчетов:

Доли сантиметра	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	0,0
Число отсчетов	130	75	110	101	92	123	91	98	108	72

Вычислить частость по каждой доле сантиметра.

Ответ: 13,0 % 7,5 % 11,0 % 10,1 % 9,2 % 12,3 % 9,1 % 9,8 % 10,8 % 7,2 %.

2. При измерениях была получена частость появления положительных случайных погрешностей 0,45. Сколько всего было произведено измерений, если отрицательных погрешностей оказалось 11?

Ответ: 20.

3. Цифры 1, 2, 3, 4, 5 написаны каждая на отдельной карточке. Тщательно перемешав карточки, будут взяты наугад две подряд. Какова вероятность, что число, составленное из этих цифр в порядке их появления, будет четным?

Ответ: 0,4.

4. В ящике находится 5 красных, 7 зеленых и 8 белых шаров. Наугад вынимают один шар. Определить вероятность того, что вынутый шар будет: а) красным, б) белым, в) зеленым, г) цветным.

Ответ: 1/4, 7/20, 2/5, 3/5.

5. Произведено 3 измерения. Какова вероятность того, что положительная погрешность появится дважды.

Ответ: 3/8.

6. В записанном номере телефона оказалась стертой последняя цифра. Какова вероятность того, что наугад набирая последнюю цифру номера, сразу соединимся с нужным лицом?

Ответ: 1/10.

7. В ящике находится 5 шаров: 2 красных и 3 синих. Какова вероятность того, что, вынимая сразу 2 шара, достанут оба красных?

Ответ: 1/10.

8. Каждая из букв «е», «н», «к», «м», «у», «и», «х», «т» написана на отдельной карточке. Карточки перемешивают, вынимают наугад по одной и раскладывают в порядке их появления. Определить вероятность того, что составится слово «техникум».

Ответ: 1/8.

9. По условиям задачи 8 найти вероятность того, что из первых трех карточек составится слово «хек».

Ответ: $A_7=210$, $P=1/210$.

10. Те же условия, но карточки разрешается раскладывать не обязательно в порядке их появления.

Ответ: $C_7^3=35$, $P=1/35$.

11. В ящике находится 5 красных, 3 синих и 2 зеленых шара. Перемешав шары, вынимают наугад 2. Найти вероятность того, что оба шара окажутся синего цвета.

Ответ: $C_3^2/C_{10}^2=1/15$.

12. Те же условия, но требуется найти вероятность того, что оба вынутых шара будут одного цвета.

Ответ: $P=14/45=\dfrac{C_3^2+C_5^2+C_2^2}{C_{10}^2}$.

13. Книга имеет 189 страниц. Определить вероятность того, что номер наугад открытой страницы будет оканчиваться цифрой 5.

Ответ: $P=19/189\approx 1/10$.

14. Найти вероятность того, что в мае будет 5 воскресений.

Ответ: 3/7 (28 дней+3 лишних дня).

15. В группе 24 учащихся, из них отлично успевающих — 4, хорошо — 12, удовлетворительно — 6 и слабо — 2 человека. Найти вероятность того, что вызванный наугад учащийся окажется отлично, хорошо или удовлетворительно успевающим.

Ответ: $P=0{,}92$.

16. В ящик положено 10 белых шаров, 6 синих и 4 красных. Шары перемешивают и наугад вынимают один. Вычислить: а) вероятности появления белого, синего, красного и цветного шаров; б) сумму первых трех вероятностей;

Ответ: $P_{бел}=1/2$, $P_{син}=3/10$, $P_{кр}=1/5$, $P_{цвет}=1/2$, $P_{бел}+P_{син}+P_{кр}=1$.

17. При измерении некоторой величины получены случайные погрешности Δ_1, Δ_2, Δ_3, Δ_4, Δ_5, Δ_6, с вероятностями, соответственно, P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6. Найти вероятность появления одной из этих погрешностей при однократном измерении.

Ответ: $P=P_1+P_2+\ldots+P_6$.

18. Пассажир ждет трамвая № 2 или № 12 на остановке, через которую проходят трамваи № 2, 6, 12 и 18. Определить вероятность того, что первый подошедший трамвай к остановке будет нужного пассажиру номера.

Ответ: $P_{2,12}=1/12$.

19. На 1000 лотерейных билетов приходится: 1 выигрыш в 500 руб., 2 выигрыша по 250 руб., 5 выигрышей по 100 руб., 10 выигрышей по 50 руб., 20 выигрышей по 10 руб. Найти вероятность выигрыша не менее 100 руб. на 1 билет.

Ответ: 8 %.

20. По условиям задачи 19 найти вероятность выигрыша не более 100 руб.

Ответ: 36 %.

21. В ящике находится 2 красных и 8 синих шаров. Вынимают один шар, отмечают его цвет и возвращают в ящик. Опыт повторяется 2 раза. Если вынут первый раз красный шар, то, предположим, что произошло событие A, а при выходе во второй раз синего шара — событие B. Установить зависимы или независимы события A и B.

Ответ: Независимы, так как $P(A)=P_B(A)=2/10$.

22. Производится три измерения. Найти вероятность того, что все 3 раза появится отрицательная погрешность.

Ответ: 1/8.

23. Бросается n игральных костей. Определить вероятность того, что хотя бы на одной из них выпадет шестерка.

Ответ: $1-(5/6)^n$.

24. Произведение 10 измерений в одинаковых условиях. Найти вероятность того, что окажется 5 отрицательных и 5 положительных погрешностей.

Ответ: $C_n^5\,(1/2)^n\approx 0{,}25$.

25. В первой урне находится 4 белых и 6 черных шаров, а во второй — 3 белых и 3 черных. Вычислить вероятности:

а) вынуть из обеих урн по белому шару, б) вынуть из обеих урн по черному шару.

Ответ: 12/60, 18/60.

26. Определить вероятность того, что первая положительная погрешность появится в пятом измерении.

Ответ: 1/32.

27. На складе находится 50 осциллографов, из них 3 импортных. Найти вероятность того, что 2 взятых одновременно наугад прибора окажутся импортными.

Ответ: 3/1225.

28. На 100 билетов лотереи приходится 10 выигрышей. Найти вероятность выигрыша на 2 билета.

Ответ: 1/110.

29. В ящике находится 7 синих и 14 красных шаров. Вынимают один шар, отмечают его цвет и возвращают обратно. Найти вероятность того, что при троекратном повторении опыта из ящика будет 2 раза вынут синий шар, а третий раз — красный.

Ответ: 2/27.

30. Монету бросают кверху 5 раз. Определить вероятность того, что герб появится: а) ровно 2 раза, б) не менее 3 раз, в) хотя бы один раз.

Ответ: а) 5/16, б) 1/2, в) 31/32.

31. Вероятность попадания в цель при одном выстреле равна 0,4. Производится 3 выстрела по цели. Какова вероятность того, что: а) не будет ни одного попадания, б) будет хотя бы одно попадание, в) все три выстрела поразят цель.

Ответ: а) 0,2169, б) 0,784, в) 0,064.

32. Какова вероятность получить 3 отрицательных погрешности при пятикратных измерениях одной и той же величины?

Ответ: 5/16.

33. Одна и та же величина измеряется 8 раз. Найти вероятность того, что положительная случайная погрешность: а) появится ровно 5 раз, б) появится не менее 2 раз, в) появится столько же раз, сколько и отрицательная случайная погрешность.

Ответ: а) 7/32, б) 247/256, в) 35/128.

34. Одна и та же величина измеряется 6 раз. Вычислить вероятность появления отрицательной случайной погрешности: а) ровно 3 раза, б) не более 2 раз.

Ответ: а) 0,312, б) 11/32.

35. Одна величина измеряется 20, а другая 25 раз. Вычислить вероятнейшее число α появлений положительной случайной погрешности в каждом случае.

Ответ: а) 10 раз, б) 12 или 13 раз.

36. Производится 7 испытаний. Вероятность положительного исхода в каждом опыте равна 2/3. Подсчитать вероятнейшее число положительных исходов и вероятность P_α.

Ответ: $\alpha=5$, $P_\alpha=224/729=0{,}307$.

37. Решить задачу 36, если проводится 8 испытаний.

Ответ: $\alpha=5$ и 6, $P_\alpha=0{,}273$.

38. Сколько надо произвести независимых испытаний появления события A, чтобы вероятнейшее число осуществления этого события было 450? Вероятность $P(A)$ при каждом испытании равна 2/3.

Ответ: 675.

39. Предполагается провести 400 независимых испытаний осуществления события A. Как велика должна быть постоянная вероятность $P(A)$ при каждом испытании, чтобы вероятнейшее число появления события A было равно 150?

Ответ: 0,375.

40. Средний процент изделий 1-го сорта, выпускаемых заводом 73 %. Найти вероятность того, что из 100 наугад взятых изделий первосортными окажутся не менее 69 и не более 77.

41. По условию задачи 40 найти вероятность того, что первосортных изделий будет более 70.

42. Найти вероятность того, что при 100 подбрасываниях монеты число выпадения герба будет находиться в пределах от 45 до 60.

43. $M(X)=145{,}3$, $\sigma=2{,}1$. Найти вероятность попадания значения случайной величины при одном испытании в пределах от 143,2 до 147,4.

44. Средний процент выпуска брака на заводе, полученный за много дней, равен 1,80 %. Стандарт этой величины $\sigma=0{,}20$ %. Найти вероятность того, что в отдельные дни процент брака будет находиться в пределах от 1,5 % до 2,0 %.

45. Среднее квадратическое отклонение результата измерения составляет $\pm 2{,}9$ мм. Написать выражение плотности нормального распределения вероятностей.

Ответ: $h=\dfrac{1}{2{,}9\sqrt{2}}=0{,}244$, $Y(\Delta)=\dfrac{0{,}244}{\sqrt{\pi}}\cdot e^{-0{,}595\Delta^2}$.

46. Используя условие задачи 45, решить задачу, если $\sigma=\pm 3'',5$.

Ответ: $Y(\Delta)=0{,}202/\sqrt{\pi}\cdot l^{-0{,}041\Delta^2}$.

47. Найти вероятность того, что погрешность измерения не превзойдет по абсолютной величине среднее квадратическое отклонение σ.

Ответ: $P=0{,}6826$.

48. Определить вероятность того, что погрешность измерения Δ не превзойдет по абсолютной величине следующих пределов: а) 1,25 σ, б) 1,50 σ, в) 1,75 σ, г) 2,00 σ, д) 2,25 σ, е) 2,50 σ, ж) 2,75 σ, з) 3,00 σ, и) 3,25 σ, к) 3,50 σ, если всего погрешностей 1000.

Ответ: 0,7887; 0,8664; 0,9199; 0,9545; 0,9756; 0,9876; 0,9940; 0,9973; 0,9989; 0,9999.

49. Найти вероятность появления погрешности в пределах от $-10''$ до $+10''$, т. е. $P(|\Delta|\leqslant 10'')$, если $\sigma=15''$.

Ответ: 0,495.

50. В каких пределах $(-X, +X)$ можно с вероятностью 0,495 ожидать появления погрешности, т. е. $P(|\Delta|\leqslant x)=0{,}495$, если $\sigma=15$ мм.

Ответ: 10,0 мм.

51. Среднее квадратическое отклонение $\sigma=\pm 13''$. Определить вероятность того, что погрешность измерения по абсолютной величине будет заключаться в пределах от $10''$ до $20''$.

Ответ: 0,318.

52. Доказать справедливость следующего соотношения между событиями: $(A+B)C=AC+BC$.

Решение. Заданный распределительный закон можно доказать путем непосредственного рассмотрения смысла утверждений, выражаемых каждой частью равенства.

Левая часть данного равенства означает событие, состоящее в том, что произошли совместно события A или B и событие C. Правая часть означает, что происходят события A вместе с C или B вместе с C (или и то, и другое). Эти два утверждения равносильны.

53. Показать, что $A+AB+BC+\overline{AC}=A+C$.

Решение. Доказательство справедливости заданного равенства проведем алгебраическим путем: $A+AB+BC+\overline{AC}=(AU+AB)+BC+\overline{AC}=A(U+B)+\overline{AC}+BC=AU+\overline{AC}+BC=A+AC+BC=A+AC+\overline{AC}+BC=A+C(A+\overline{A})+BC=A+C+BC=A+C$.

54. Двум радиостанциям разрешена работа на десяти одинаковых фиксированных частотах. Определить вероятность $P(A)$ того, что настроенные независимо обе радиостанции окажутся работающими на одинаковых частотах.

Решение. Обозначим частоты одной радиостанции через f_i', а частоты другой — через f_i'', $i=0, 1, 2, \ldots, 9$, $f_i'=f_i''$. Расположим все возможные исходы:

$$
\begin{matrix}
f_0' f_0'' & f_0' f_1'' & \ldots & f_0' f_9'' \\
f_1' f_0'' & f_1' f_1'' & \ldots & f_1' f_9'' \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
f_9' f_0'' & f_9' f_1'' & \ldots & f_9' f_9''
\end{matrix}
$$

Всего равновозможных исходов $N=10\cdot 10=100$. Эти исходы составляют полную группу несовместных случаев. Исходов, благоприятствующих событию A (обе радиостанции окажутся работающими на одинаковых частотах), будет $n=10$ ($f_0', f_0'', f_1', f_1'', \ldots, f_9' f_9''$). Следовательно, $P(A)=n/N=10/100=0,1$.

55. По линии связи в случайном порядке передаются 30 знаков русского алфавита. Найти вероятность того, что на ленте появится последовательность букв, образующих слово «радио».

Решение. Число всех равновозможных случаев (число выборов из 30 букв алфавита по 5) равно числу размещений из 30 по 5 букв, т. е. $N=A_{30}^5=30\cdot29\cdot28\cdot27\cdot26$. Из этих случаев благоприятствующим событию A является только один (комбинация, образующая слово «радио»), т. е. $n=1$. Следовательно, $P(A)=n/N=1/A_{30}^5=1/30\cdot29\cdot28\cdot27\cdot26=5,88\cdot10^{-8}$.

56. Производится прием кодовых комбинаций, содержащих пять цифр от 1 до 5. Какова вероятность $P(A)$ того, что в принятой комбинации цифры образуют последовательность 1, 2, 3, 4, 5?

Решение. Число всех равновозможных случаев N равно числу перестановок из пяти элементов, т. е. $N=P_5=5!=120$. Из этих случаев благоприятствующим событию A является только один, т. е. $n=1$. Следовательно, $P(A)=n/N=1/5!=1/120$.

57. В партии из N запасных ламп имеется M нестандартных. Для проверки выбираются наугад K радиоламп из этой партии ($K<N$). Определить вероятность $P(A)$ того, что среди них окажутся ровно l нестандартных ($l\leqslant M$).

Решение. Общее число возможных выборов из N радиоламп по K равно числу сочетаний из N элементов по K, т. е. C_n^k. Благоприятствующими поставленному условию являются случаи, когда из общего числа M нестандартных радиоламп взято ровно l штук, что можно осуществить C_n^l способами. Но каждый из этих случаев в контрольной партии может быть в комбинации с остальными $K-l$ стандартными лампами. Число таких комбинаций равно C_{N-M}^{k-l}. Следовательно, общее число благоприятствующих случаев будет равно произведению $C_M^l\cdot C_{N-M}^{k-l}$. В соответствии с определением вероятности получим: $P(A)=C_M^l\cdot C_{N-M}^{k-l}/C_N^k$.

58. По данным ремонтной мастерской в среднем из 100 отказов телевизора 50 % обусловлено выходом из строя электронных ламп, 15 % — конденсаторов, 12 % — резисторов, 5 % — кинескопов, а остальные отказы обусловлены другими причинами. Найти вероятность $P(A)$ отказа телевизора по другим причинам.

Решение. По условию вероятности выхода из строя телевизора из-за отказа различных элементов равны: $P^*(A_1)=0,5$; $P^*(A_2)=0,15$; $P^*(A_3)=0,12$; $P^*(A_4)=0,05$, где A_1, A_2, A_3, A_4 — отказы телевизора, обусловленные, соответственно, выходом из строя электронных ламп, конденсаторов, резисторов и кинескопов. События A_1, A_2, A_3, A_4 составляют полную группу событий. Следовательно, $P^*(A)=1-\Sigma P(A_i)=1-(0,5+0,15+0,12+0,05)=0,18$.

59. В партии из N полупроводниковых триодов имеется M бракованных. Для контроля из партии берется наугад n триодов. Какова вероятность $P(A)$ того, что среди взятых для контроля будет не более m бракованных.

Решение. Пусть A — событие, состоящее в том, что среди n взятых для контроля триодов будет не более m бракованных. Событие A произойдет тогда, когда среди n взятых на проверку триодов или не будет ни одного бракованного (событие A_0), или один бракованный (событие A_1), или два бракованных (событие A_2) и т. д., или окажется m бракованных триодов (событие A_m), т. е.

$$A=A_0+A_1+A_2+\ldots+A_k+\ldots+A_m=\sum_0^m A_k.$$

Вероятность $P(A_k)$ события A_k равна $P(A_k)=C_M^k\, C_{N-M}^{n-k}/C_N^n$ или

$$P(A_k)=\sum_0^m P(A_k)=\frac{\sum_0^m C_M^k\cdot C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n}.$$

60. Каждая буква слова «математика» написана на отдельной карточке, карточки тщательно перемешаны. Последовательно извлекают четыре. Какова вероятность $P(A)$ получить слово «тема»?

Решение. Пусть A_1, A_2, A_3, A_4 — события, состоящие в последовательном извлечении букв «т», «е», «м», «а». Тогда соответствующие вероятности равны: $P(A_1)=2/10$; $P(A_2/A_1)=1/9$; $P(A_3/A_1A_2)=2/8$; $P(A_4/A_1A_2A_3)=3/7$.

Применяя формулу умножения, получим:
$P(A)=P(A_1)\cdot P(A_2A_1)\cdot P(A_3/A_1A_2)\cdot P(A_4/A_1A_2A_3)=2(10\cdot1)9\cdot2(8\cdot3)7=1/420$.

61. Два стрелка стреляют по мишени по очереди до первого попадания. Каждый из них имеет право сделать не более двух выстрелов. Зная, что при одном выстреле стрелок попадает в мишень с вероятностью P_1, а второй — с вероятностью P_2, найти вероятность того, что первый стрелок попадет в цель, второй стрелок попадет в цель.

Решение. Рассмотрим следующие события: A — первый стрелок попадает в мишень, B — второй стрелок попадает в мишень; A_1 — попадание у первого стрелка при первом выстреле, A_2 — попадание у первого стрелка при втором выстреле; $\overline{A_2}$ — промах у первого стрелка при втором выстреле; B_1 — попадание у второго стрелка при первом выстреле, $\overline{B_1}$ — промах у второго стрелка при первом выстреле; B_2 — попадание у второго стрелка при втором выстреле. Тогда:

$$A=A_1+\overline{A_1}\cdot\overline{B_1}\cdot A_2,\quad B=\overline{A_1}B_1+\overline{A_1}\ \overline{B_1}\ \overline{A_2}B_2.$$

Так как

$$P(A_1)=P(A_2)=P_1,\ P(\overline{A_1})=P(\overline{A_2})=1-P_1;$$

$$P(B_1)=P(B_2)=P_2,\ P(\overline{B_1})=1-P_2,\ \text{то:}$$

$$1)\ P(A)=P+(1-P_1)(1-P_2)P_1=P_1[1+(1-P_1)(1-P_2)];$$

$$2)\ P(B)=(1-P_1)P_2+(1-P_1)(1-P_2)(1-P_1)P_2=(1-P_1)P_2+[1+(1-P_1)(1-P_2)].$$

62. Вероятности того, что параметры одного из трех блоков радиостанции (антенно-фидерного устройства, приемника или передатчика) выйдут за время полета самолета из допусков, равны, соответственно, 0,1; 0,2; 0,3. Если из поля допусков вышли параметры одного блока, связь не будет установлена с вероятностью 0,25, если двух блоков, то 0,4, если трех, то 0,5. Найти вероятность $P(A)$ того, что связь не будет установлена.

Решение. К интересующему нас событию A ведут три гипотезы: H_1 — за поле допусков вышли параметры одного блока, H_2 — за поле допусков вышли параметры двух блоков, H_3 — за поле допусков вышли параметры трех блоков. Согласно теореме сложения и умножения вероятностей имеем:

$$P(H_1)=0,1(1-0,2)(1-0,3)+0,2(1-0,1)(1-0,3)+0,3(1-0,1)(1-0,2)=0,398;$$

$$P(H_2)=0,1\cdot0,2(1-0,3)+0,1\cdot0,3(1-0,2)+0,2\cdot0,3(1-0,1)=0,092;$$

$$P(H_3)=0,1\cdot0,2\cdot0,3=0,006;$$

По условию $P(A/H_1)=0,25$; $P(A/H_2)=0,4$; $P(A/H_3)=0,5$.

Следовательно, по формуле полной вероятности получим.

$$P(A)=\sum_1^3 P(H_i)P(A/H_i)=0,398\cdot0,25+0,092\cdot0,4+0,006\cdot0,05=0,139.$$

63. По каналу связи, подверженному воздействию помех, передается одна из двух команд управления в виде кодовых комбинаций 11111 или 00000, причем вероятности передачи этих команд, соответственно, равны 0,7 и 0,3. Из-за наличия помех вероятность правильного приема каждого из символов (1 и 0)

уменьшается до 0,6. Предполагается, что символы кодовых комбинаций искажаются независимо друг от друга. На выходе приемного устройства зарегистрирована комбинация 10110. Определить, какая команда была передана?

Решение. Пусть событие A состоит в приеме комбинации 10110. К этому событию ведут две гипотезы: H_1 — была передана комбинация 11111, H_2 — была передана комбинация 00000. По условию $P(H_1)=0{,}7$; $P(H_2)=0{,}3$. Условная вероятность приема кодовой комбинации 10110 вместо 11111 равна: $P(A/H_1)=0{,}6\cdot 0{,}4\cdot 0{,}6\cdot 0{,}6\cdot 0{,}4=0{,}035$. Аналогично: $P(A/H_2)=0{,}4\cdot 0{,}6\cdot 0{,}4\cdot 0{,}4\cdot 0{,}6=0{,}023$. По формуле находим:

$$P(H_1/A)=\frac{P(H_1)\cdot P(A/H_1)}{\sum\limits_1^2 P(H_к)P(A/H_к)}=\frac{0{,}7\cdot 0{,}035}{0{,}1\cdot 0{,}035+0{,}3\cdot 0{,}023}\approx 0{,}78;$$

$$P(H_2/A)=\frac{0{,}3\cdot 0{,}023}{0{,}0314}=0{,}22.$$

Сравнивая найденные условные вероятности, заключаем, что при появлении на выходе комбинации 10110 с вероятностью 0,78 была передана команда 11111.

64. Производится 6 независимых выстрелов по цели. Вероятность P попадания при каждом выстреле равна 0,75. Вычислить:

1) вероятность ровно пяти попаданий;
2) вероятность не менее пяти попаданий;
3) вероятность более трех промахов.

Решение. 1) По условию вероятность попадания при каждом выстреле $P=0{,}75$. Следовательно, вероятность промаха $q=1-P=0{,}25$. Вероятность ровно пяти попаданий равна:

$$P_6(5)=C_6^5 q^1 p^5=6(0{,}75)^5\, 0{,}25^1=0{,}356.$$

2) Требование, чтобы при 6 выстрелах было не менее пяти попаданий будет удовлетворено, если осуществится 5 или 6 попаданий. Эти события несовместны. Поэтому по формуле имеем

$$P_6(m\geqslant 5)=\sum_{m=5}^{6} C_6^m p^m q^{6-m}=C_6^5 p^5 q^1+C_6^6 p^6 q^0=6(0{,}75)^5\cdot 0{,}25+(0{,}75)^6\approx 0{,}534.$$

3) Вероятность того, что при 6 выстрелах будет более трех промахов, равна вероятности того, что при этих 6 выстрелах будет меньше трех попаданий (или ни одного попадания, или одно, или два попадания). Используя формулу, получим

$$P_6(m\leqslant 2)=\sum_{m=0}^{2} C_6^m p^m q^{6-m}=C_6^0 p^0 q^6+C_6^1 p^1 q^5+C_6^2 p^2 q^4=(0{,}25)^6+$$
$$+6\cdot 0{,}75\cdot(0{,}25)^5+15(0{,}75)^2\cdot(0{,}25)^4\approx 0{,}038.$$

65. Вероятность P появления события A при каждом испытании равна 0,2. Производится 400 *независимых испытаний. Определить вероятность $P(K)$ того,* что: 1) событие A наступит ровно 80 раз, 2) событие A наступит от 60 до 96 раз включительно.

Решение. 1) Воспользуемся локальной формулой МУАВРА—ЛАПЛАСА. По условию $n=400$, $k=80$, $p=0{,}2$, $q=0{,}8$. Следовательно,

$$x=(k-np)\sqrt{npq}=(80-400\cdot 0{,}2)\cdot\sqrt{400\cdot 0{,}2\cdot 0{,}8}=0.$$

Тогда: $P_{400}(80)=p(0)/\sqrt{400\cdot 0{,}2\cdot 0{,}8}$. По таблице находим $p(0)=0{,}3989$.

Окончательно получаем: $p_{400}(80)=0{,}0499$.

2) Используем приближенную интегральную формулу МУАВРА—ЛАПЛАСА:

$$p_{400}(60\leqslant k\leqslant 96)=\Phi\left(\frac{96-400\cdot 0{,}2}{\sqrt{400\cdot 0{,}2\cdot 0{,}8}}\right)-\Phi\left(\frac{60-400\cdot 0{,}2}{\sqrt{400\cdot 0{,}2\cdot 0{,}8}}\right)=$$
$$=\Phi(2)-\Phi(-2{,}5)=\Phi(2)-[1-\Phi(2{,}5)].$$

В приложении 1 находим: $\Phi(2)=0{,}977$; $\Phi(2{,}5)=0{,}991$. Следовательно, $P_{400}(60\leqslant K\leqslant 96)=0{,}977-1+0{,}994=0{,}991$.

66. Противотанковое орудие ведет стрельбу по танку. Всего производится 6 выстрелов, причем вероятность попадания в танк при каждом выстреле равна 0,3. Рассчитать: 1) наивероятнейшее число попаданий в танк, 2) число выстрелов, необходимых для того, чтобы с вероятностью 0,9 поразить танк, если для этого достаточно одного попадания.

Решение. 1) Наивероятнейшее число попаданий K_0 находим по формуле $np-q<K_0<np+p$. По условию: $n=6$, $p=0{,}3$, $q=1-p=0{,}7$. Следовательно, $6\cdot 0{,}3-0{,}7<K_0<6{,}0\cdot 0{,}3+0{,}3$, т. е. $1{,}1\leqslant K\leqslant 2{,}1$. Между числами 1,1 и 2,1 заключено лишь одно целое число — 2. Поэтому наивероятнейшее число $K_0=2$. 2) Применив формулу $n>\log(1-p_1)/\log(p)$, получим $n\geqslant\log(1-0{,}9)/(\log 1-0{,}3)\approx 6{,}45$. Таким образом, для поражения танка с вероятностью 0,9 достаточно произвести 7 выстрелов.

67. На участке обстрела находятся три цели. Вероятности P_i попадания в первую, вторую, третью цели, соответственно, равны $P_1=0{,}4$, $P_2=0{,}3$, $P_3=0{,}2$. По участку произведено 12 выстрелов. Какова вероятность того, что в первую цель попадет 5 снарядов, во вторую — 4, в третью — 2 снаряда?

Решение. По условию $n=12$, $p_1=0{,}4$, $p_2=0{,}3$, $p_3=0{,}2$, $p_4=1-(0{,}4+0{,}3+0{,}2)=0{,}1$, $K_1=5$, $K_2=4$, $K_3=2$, $K_4=12-5-4-2=1$. Здесь: P_4 — вероятность попадания в область, находящуюся вне целей, K_4 —число попаданий в эту область.

Согласно формуле $P_n(K_1, ..., K_m)$ искомая вероятность:

$$P_{12}(5,4,2,1)=\frac{12!}{5!\,4!\,2!\,1!}\cdot(0{,}4)^5(0{,}3)^4\cdot(0{,}2)^2(0{,}1)=0{,}0276.$$

68. Разведывательная пеленгаторная система состоит из четырех синхронно вращающихся антенн с неперекрывающимися диаграммами направленности, причем каждая антенна соединена со своим приемником. Длительность сигнала такова, что он не может быть обнаружен двумя приемниками. Найти связь события A (обнаружение сигнала пеленгаторной системой) с событиями A_i, $i=1, 2, 3, 4$ которые состоят в обнаружении сигнала первым, вторым, третьим, четвертым приемниками.

Ответ: $A=A_1+A_2+A_3+A_4$.

69. Прибор состоит из двух блоков первого типа и трех блоков второго типа. Пусть события: A_i, $i=1, 2$ — исправен i-й блок первого типа, B_j, $j=1, 2, 3$ — исправен j-й блок второго типа. Прибор работает, если исправны хотя бы один блок первого типа и не менее двух блоков второго типа. Выразить событие C, означающее работу прибора, через события A_i и B_j.

Ответ: $C=(A_1+A_2)(B_1B_2+B_1B_3+B_2B_3)$.

70. В партии полупроводниковых триодов n стандартных и m бракованных. При контроле оказалось, что первые k триодов стандартны. Определить вероятность того, что следующий триод будет стандартным.

Ответ: $P=(n-k)/(n+m-k)$.

71. На пяти одинаковых карточках написаны цифры 1, 2, 3, 4 и 5. Две из них наугад вынимаются одна за другой. Найти вероятность того, что а) сумма цифр на вынутых карточках является нечетным числом, б) вторая цифра меньше первой, в) вторая цифра больше первой ровно на 1.

Ответ: а) 3/5; б) 1/2; в) 1/5.

72. В собираемый радиоблок входят две одинаковые радиолампы. Технические условия приема блока нарушатся, если обе лампы с пониженной крутизной. У монтажника имеется 10 ламп, из которых три имеют пониженную крутизну. Определить вероятность нарушения технических условий при случайном выборе двух электронных ламп.

Ответ: 1/15.

73. В мастерской находится $a+b$ блоков от двух различных радиоприемников, из которых два повреждены. Какова вероятность P того, что повреждены блоки различных приемников?

Ответ: $P=2ab/(a+b)(a+b-1)$.

74. При испытаниях 200 случайно отобранных резисторов в течение времени t оказалось, что относительная частота исправных резисторов равна 0,95. Определить число исправных резисторов.

Ответ: 190.

75. Контролер проверяет взятые случайно изделия из партии, содержащей a изделий первого сорта и b изделий второго. Проверка показала, что первые m изделий ($m<b$) второго сорта. Вычислить вероятность P того, что из следующих четырех проверяемых изделий по крайней мере два окажутся второсортными.

Ответ: $P=(C^2_{b-m}\cdot C^2_a+C^3_{b-m}+C^4_{b-m})/C^4_{a+b-m}$.

76. На вход радиоприемного устройства поступают кодовые комбинации, состоящие из двух знаков: 1 (посылка) и 0 (пауза). Какова вероятность того, что в первой кодовой комбинации будет хотя бы один нуль, если появление нуля и единицы равновозможно?

Ответ: 3/4.

77. Партия из 100 радиоламп подвергается выборочному контролю. Условием непригодности всей партии является наличие хотя бы одной бракованной радиолампы среди пяти проверенных. Определить вероятность для данной партии быть непринятой, если она содержит 5 % неисправных радиоламп.

Ответ: 0,23.

78. Прием радиосигналов производится на два разнесенных приемника. Вероятность правильного приема равна P_1, на второй — P_2. События, состоящие в приеме сигналов каждым приемником, считаются независимыми. Найти вероятность P правильного приема радиосигналов.

Ответ: $P=P_1+P_2+P_1P_2$.

79. Вероятность ухода частоты принимаемых колебаний за пределы полосы пропускания приемника из-за нестабильности частоты колебаний передатчика равна 0,1, а из-за нестабильности частоты колебаний гетеродина приемника — 0,2. Определить вероятность того, что частота принимаемых колебаний не выйдет за пределы полосы пропускания приемника.

Ответ: 0,72.

80. Произведены три независимых измерения некоторой физической величины. Вероятность того, что при одном измерении ошибка превысит заданную точность равна 0,4. Определить вероятность того, что только в одном из измерений ошибка превысит заданную точность.

Ответ: 0,432.

81. В студии имеются три телевизионные камеры. Вероятность того, что каждая камера включена в каждый момент равна 0,6. Найти вероятность того, что в данный момент включена хотя бы одна камера.

Ответ: 0,936.

82. При передаче текста 10 % букв искажаются и принимаются неверно. Какова вероятность того, что все пять букв данного слова будут приняты правильно?

Ответ: 0,59.

83. По каналу связи передаются два сигнала: нуль и единица. Из-за наличия помех посланный сигнал принимается ошибочно с вероятностью 0,01 и принимается правильно с вероятностью 0,99 (независимо от того, были приняты предшествующие сигналы с ошибкой или правильно). Зная, что послана комбинация 10110, найти вероятность того, что: а) она принята без искажений, б) принята комбинация 11110, в) в принятой комбинации имеется одна ошибка.

Ответ: а) $0{,}99^5$, б) $0{,}01\cdot 0{,}99^4$, в) $0{,}05\cdot 0{,}99^4$.

84. Связная радиостанция может работать в трех режимах по мощности: полной, половинной и при мощности, составляющей 25 % полной мощности. Вероятности работы радиостанции в этих режимах, соответственно, равны 0,7; 0,1; 0,2. Вероятности отказа радиостанции при работе в этих режимах за время T составляют, соответственно, 0,3; 0,2; 0,05. Определить вероятность того, что за T часов работы радиостанция не выйдет из строя.

Ответ: 0,76.

85. Вероятности того, что во время работы ЭВМ произойдет сбой в арифметическом устройстве, в оперативной памяти, в остальных блоках, относятся как 3:2:5. Вероятности обнаружения сбоя в арифметическом устройстве, в оперативной памяти и в остальных блоках, соответственно, равны 0,8; 0,9; 0,9. Найти вероятность того, что возникший в машине сбой будет обнаружен.

Ответ: 0,86.

86. По каналу связи передается два сигнала: нуль и единица. Из-за наличия помех возможны искажения сигналов: единица переходит в единицу с вероятностью P и в нуль — с вероятностью $1-P$; нуль переходит в нуль с вероятностью q и в единицу — с вероятностью $1-q$. Сигнал отправлен наугад. Определить вероятность P того, что: а) на приемном конце будет получен сигнал 1; б) на приемном конце будет получен сигнал 0.

Ответ: $P=0{,}5(1+p-q)$; $P=0{,}5(1-p+q)$.

87. Два из трех независимо работающих элементов вычислительного устройства отказали. Вычислить вероятность того, что отказали первый и второй элементы, если вероятности отказа первого, второго и третьего элементов, соответственно, равны 0,2; 0,4; 0,3.

Ответ: 0,298.

88. Самолет может выполнять задание на больших, средних и малых высотах, причем на больших высотах предполагается совершить 25 % всех вылетов, на средних — 10 % и на малых — 65 %. Вероятности выхода самолета на заданный объект на больших, средних и малых высотах, соответственно, равны 0,75; 0,9; 0,65. Самолет вышел на заданный объект. Определить вероятность того, что полет происходил на малой высоте.

Ответ: 0,064.

89. По двоичному каналу связи с шумами передаются токовая (1) и бестоковая (0) посылки с априорными вероятностями $P(1)=0{,}6$ и $P(0)=0{,}4$.

Из-за наличия помех возможны искажения сигналов: вероятность перехода единицы в единицу (вероятность принять единицу при передаче единицы) $p(1'/1)=0{,}9$; вероятность перехода единицы в нуль $p(0'/0)=0{,}8$ и вероятность перехода нуля в единицу $p(1'/0)=0{,}2$. На выходе радиоприемного устройства зарегистрирована единица. Какова вероятность того, что: а) в действительности была передана единица; б) на самом деле был передан нуль.

Ответ: а) 0,87, б) 0,13.

90. Вероятности того, что при одном выстреле из орудия получаются недолет, попадание и перелет равны 0,1; 0,7; 0,2. Для другого орудия вероятности этих событий равны, соответственно, 0,2; 0,6; 0,2. Наугад выбранное орудие стреляет трижды. Отмечены: одно попадание, один недолет и один перелет. Найти вероятность того, что стреляло первое орудие.

Ответ: 7/19.

91. Импульсно-кодовая комбинация образуется с помощью шести двоичных сигналов 0 или 1, которые случайным образом появляются на позициях кодовой комбинации независимо друг от друга. Появление сигналов 0 или 1 на каждой позиции равновозможно. Вычислить вероятность того, что в кодовой комбинации появится число нулей меньше двух.

Ответ: 7/64.

92. При вращении антенны обзорного радиолокатора за время облучения цели успевает отразиться 8 импульсов. Для обнаружения цели необходимо, чтобы через приемник на индикатор прошло не менее 6 отраженных импульсов. Вероятность подавления импульса шумом в приемнике равна 0,1. Определить вероятность обнаружения цели за один оборот антенны радиолокатора.

Ответ: 0,96.

93. На ограничитель поступает последовательность из восьми случайных по амплитуде импульсов. Вероятность превышения порога ограничения каждым

импульсом равна 0,25. Вычислить: а) вероятность того, что из 8 импульсов не менее 6 превысит порог; б) наивероятнейшее число импульсов, превысивших порог.

Ответ: а) 0,00422, б) 2.

94. В передаваемой по каналу связи последовательности знаков, образующих сообщение, любой знак из-за помех независимо искажается с вероятностью 0,2. Независимым образом передано 10000 знаков. Какова вероятность того, что в принятой последовательности будет от 2000 до 2100 искажений?

Ответ: 0,494.

95. Вероятности разрегулировки датчика опорных частот, передатчика, приемника и антенно-фидерного тракта за время T работы радиостанции, соответственно, равны 0,4; 0,2; 0,3; 0,3. Найти вероятность отказа радиостанции за время T, если из-за разрегулировки одного блока радиостанция отказывает с вероятностью 0,3, из-за разрегулировки двух блоков — 0,5, трех блоков — 0,7, четырех — 0,9.

Ответ: 0,316.

96. По линии связи передано четыре радиосигнала, имеющих различные амплитуды. Вероятности приема каждого из сигналов не зависит от приема остальных и, соответственно, равны 0,2; 0,3; 0,4; 0,5. Определить вероятность того, что: а) будет принято k сигналов ($k=0, 1, 2, 3, 4$), б) будет установлена двусторонняя связь, если вероятность этого события при приеме одного сигнала равна 0,2, двух сигналов — 0,6, трех и четырех сигналов — единице.

Ответ: а) 0,168; 0,394; 0,320; 0,106; 0,012; б) 0,389.

97. Девяти радиостанциям разрешена работа на трех волнах: λ_1, λ_2 и λ_3. Выбор волны на каждой станции производился случайно. Найти вероятность того, что на каждой из волн будет работать точно три станции.

Ответ: 0,0854.

98. В результате пяти измерений физической величины X одним прибором, который не имеет систематической ошибки, получены следующие результаты: 92, 94, 103, 105, 106. Определить: а) выборочную среднюю m_x измеряемой величины; б) выборочную $D(X)$ и исправленную s^2 дисперсии ошибок прибора.

Ответ: а) $m_x=100$; б) $D(X)=34$, $s^2=42{,}5$.

99. Из 100 транзисторов в среднем бывает два бракованных. Проверено десять партий по 100 транзисторов в каждой. Отклонение числа бракованных транзисторов от среднего приведены ниже:

Номер партии . .	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Отклонение от среднего	—1	0	1	1	—1	1	0	—2	2	1

Построить распределение выборки, эмпирическую функцию распределения $\widehat{F}(x)$ и гистограмму выборки.

Ответ:

x	—2	—1	0	1	2
m_i	1	2	2		1
p_i	0,1	0,2	0,2	0,4	0,1

$$\widehat{F}(x)=\begin{cases} 0 & x\leqslant -2 \\ 0{,}1 & -2<x\leqslant 1 \\ 0{,}3 & -1<x\leqslant 0 \\ 0{,}5 & 0<x\leqslant 1 \\ 0{,}9 & 1<x\leqslant 2 \\ 1 & x>2 \end{cases}$$

100. Построить гистограмму по распределению выборки, представленную ниже:

Интервалы . . .	0—2	2—4	4—6	6—8	8—10
m_i	20	30	50	20	10

Ответ: $\widehat{P}_{1/h}=0{,}1$; $P_{2/h}=0{,}15$; $P_{3/h}=0{,}25$.

101. Отобраны случайно 200 однотипных радиостанций. Время их работы до первого отказа характеризуется следующими данными:

Срок службы радиостанции до первого отказа, ч	900—1100	1100— 1300	1300—2500
Количество радиостанций . . .	10	120	70

Вычислить выборочные средние m_x, дисперсию $D(x)$ и среднее квадратическое отклонение σ срока службы радиостанций до первого отказа.

Ответ: $m_x=1260$ (ч), $D(x)=12400$ (ч^2), $\sigma=111{,}4$ (ч).

102. Измерительным прибором, практически не имеющим систематической ошибки, было произведено пять независимых измерений, результаты которых представлены ниже:

Номер измерения . . .	1	2	3	4	5
x_i	2781	2836	2807	2763	2858

Определить: а) выборочную дисперсию ошибки измерения, если измеряемая величина точно известна и равна 2800; б) выборочное среднее, выборочную дисперсию и ее несмещенную оценку, если точное значение измеряемой величины известно.

Ответ: а) $m^*_x=2809$; б) $D(x)=1287$; $D^*(x)=1206{,}8$; $s^2=1508{,}5$.

103. Определить методом максимального правдоподобия оценку параметра p биномиального распределения $P_n(k)=C_n^k\, p^k(1-p)^{n-k}$, если в n_1 независимых испытаниях событие A появилось m_1 раз и в n_2 независимых испытаниях m_2 раз.

Ответ: $p=(m_1+m_2)/(n+n_2)$.

104. Выборка объемом n извлечена из совокупности с показательным распределением $p_1(x)=\lambda\cdot e^{-\lambda x}$; $x>0$. Найти оценку $\widehat{\lambda}$ максимального правдоподобия для параметра λ.

Ответ: $\widehat{\lambda}=1/m_x$;

105. Произведена выборка объемом $n=100$ из большой партии однотипных радиоламп. Средний срок службы радиолампы выборки оказался равным 5000 ч. Найти с надежностью 0,95 доверительный интервал для среднего срока службы радиолампы во всей партии, если среднее квадратическое отклонение срока службы составляют 40 ч.

Ответ: $4992{,}16<m_x<5007{,}84$ ч.

106. Каков должен быть минимальный объем выборки n, чтобы с надежностью 0,98 точность оценки математического ожидания m генеральной совокупности с помощью выборочного среднего равна 0,2, если среднее квадратическое значение $\sigma=1{,}5$?

Ответ: $n=306$.

107. Средняя квадратическая ошибка радиовысотомера $\sigma=15$ м. Сколько потребуется таких высотомеров, чтобы с надежностью 0,99 ошибка средней высоты m_x была больше — 30 м, если ошибки радиовысотомеров имеют нормальное распределение, а систематические ошибки отсутствуют?

Ответ: не менее двух.

108. Случайный радиосигнал распределен по нормальному закону, причем его среднее значение неизвестно, а дисперсия $\sigma^2=1$ В^2. Произведено 100 измерений сигнала, по которым определено значение выборочного среднего $m_x=1{,}5$ В. Определить величину доверительной вероятности p, с которой может быть гарантирована погрешность измерения среднего значения сигнала $\Delta_{\text{пред}}=0{,}2$.

Ответ: $p=0{,}954$.

109. Распределение выборки объемом $n=10$ задано:

x_i	—2	1	2	3	1	5
m_i	2	1	2	2	2	1

Оценить с надежностью 0,95 математическое ожидание m_x случайной величины X, распределенной по нормальному закону, по выборочной средней при помощи доверительного интервала.

Ответ: $0{,}3<m_x<3{,}7$.

110. Произведено 10 независимых измерений случайной величины X, подчиненной нормальному закону с неизвестными параметрами m_x и σ_x. Результаты измерений представлены ниже:

Номер измерения . . .	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Результат измерения . . .	2,5	2	−2,3	1,9	−2,1	2,4	−2,5	2,3	1,5	−1,7

Найти оценку m_x для математического ожидания и построить доверительный интервал, соответствующий доверительной вероятности $p=0,95$.

Ответ: $m_x=0,4$; $-1,18<m<1,98$.

111. Произведено 12 измерений напряжения радиосигнала одним и тем же прибором, не имеющим систематической ошибки, причем выборочное среднее квадратическое отклонение σ случайных ошибок оказалось равным 0,6В. Найти точность прибора с надежностью 0,99.

Ответ: $0,39\text{В}<\sigma<1,24\text{В}$.

112. На контрольных испытаниях 16 радиоламп были определены выборочные характеристики их срока службы, которые оказались равными $m_x=3000$ ч и $s=20$ ч. Считая, что срок службы каждой лампы является нормальной случайной величиной, определить: а) доверительный интервал для математического ожидания и среднего квадратического отклонения при доверительной вероятности 0,9; б) с какой вероятностью можно утверждать, что абсолютное значение ошибки определения m_x не превзойдет 10 ч, а ошибка в определении σ_x будет меньше 2 ч?

Ответ: а) $2991,235\text{ ч}<m_x<3008,765\text{ ч}$; $15,50\text{ ч}<\sigma_x<28,74\text{ ч}$; б) 0,93; 0,41.

113. На телефонной станции производилась регистрация числа неправильных соединений в минуту. Результаты наблюдений приведены ниже:

x	0	1	2	3	4	5	6	7
m_i	8	17	16	10	6		0	1

Требуется: а) определить выборочные характеристики m_x и s^2 и проверить выполнение основного условия для распределения Пуассона; б) найти теоретическое распределение Пуассона и проверить степень соответствия теоретического и эмпирического распределений по критерию χ^2 с уровнем значимости $\alpha=0,05$.

Ответ: $m_x\approx s^2=2$, т. е. условие для закона Пуассона практически выполняется; б) $\chi^2=0,2<\chi^2_{0,05}=9,5$.

114. Произведены испытания 500 радиоприемников на их чувствительность. Данные отклонений чувствительности от номинала указаны ниже:

Интервалы чувствительности . .	−4; −3	−3; −2	−2; −1	−1; 0	0; 1	1; 2	2; 3	3; 4
m_i	6	25	72	133	120	88	46	10

Проверить по критерию χ^2 с уровнем значимости $\alpha=0,01$ гипотезу о том, что результаты испытаний подчиняются нормальному распределению.

Ответ: $\chi^2=3,94<\chi^2_{0,001}=15,1$.

115. Испытания 200 радиоламп на их срок службы дали следующие результаты:

Срок службы, ч .	300—400	400—500	500—600	600—700	700—800	800—900	900—1000	1000—1100	1100—1200
m_i	1	9	18	33	40	52	29	14	4

Требуется: 1) установить теоретический закон распределения срока службы радиоламп и найти его параметры; 2) написать выражения для плотности вероятности $p_1(x)$ и функции распределения $F_1(x)$; 3) пользуясь критерием χ^2, установить, согласуются ли данные испытаний с гипотезой о распределении случайной величины по избранному теоретическому закону.

Ответ: 1) закон распределения нормальный с параметрами $m=m_x=784$ ч, $\sigma^2=26844$ ч, $\sigma=163,8$ ч.

$$2)\quad p_1(x)=\frac{1}{163,8\sqrt{2\pi}}\cdot\exp\left[-\frac{(x-784)^2}{53688}\right];\ F_1(x)=\Phi\left(\frac{x-784}{163,8}\right);$$

3) согласуются.

116. Ошибки 15 измерений дальности до цели с помощью радиодальномера представлены ниже:

Номер измерения . . .	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Ошибка $x_i(m)$.	18	−15	−5	6	−15	6	12	−5	−10	6	−5	−10	12	−10	−5

Требуется: 1) построить распределение выборки и статистическую функцию распределения $F(x)$; 2) определить выборочную среднюю m_x и выборочную дисперсию $D(x)$ ошибки измерения.

Решение. Вариационный ряд имеет вид: −15, −15, −10, −10, −10, −5, −5, −5, −5, 6, 6, 6, 12, 12, 18. Он содержит шесть различных значений −15, −10, −5, 6, 12, 18. Частоты этих значений равны, соответственно: 2, 3, 4, 3, 2, 1.

1. Распределение выборки представим следующим образом:

x, м	−15	−10	−5	6	12	18
m_i	2	3	4	3	2	1
$p_i=m_i/n$ . . .	2/15	3/15	4/15	3/15	2/15	1/15

Наименьшее значение ошибки измерения X равно −15. Следовательно, $F(x)=0$ при $X\leqslant-15$. Значение $X<-10$, а именно $X=-15$, наблюдалось 2 раза, поэтому $F(x)=2/15$ при $-15\leqslant x\leqslant-10$; при $-10<x\leqslant-5$, $F(x)=2/15+3/15=5/15$. Продолжая аналогичные рассуждения, получим результаты, приведенные ниже:

$x\ldots$	$x\leqslant-15$	$-15\leqslant x\leqslant-10$	$-10\leqslant x\leqslant-5$	$-5\leqslant x\leqslant6$	$6\leqslant x\leqslant12$	$12\leqslant x\leqslant18$	$x\geqslant18$
$F(x)\ldots$	0	2/15	5/15	9/15	12/15	14/15	1

2. Используя формулы

$$m_x=\frac{1}{n}\sum_{1}^{n}x_im_i,\quad D(x)=\frac{1}{n}\Sigma(x_i-m_x)^2\cdot m_i,$$

$$m_x=\frac{-15\cdot2-10\cdot3-5\cdot4+6\cdot3+12\cdot2+18\cdot1}{15}=\frac{-4}{3}\ (\text{м});$$

$$D(x)\approx103(m^2).$$

117. В течение 24 ч регистрирующее устройство контроля каждый час фиксирует напряжение сети. После первичной обработки данных получено распределение выборки в интервальной форме, приведенное ниже:

Интервалы, В . .	213—215	215—217	217—219	219—221	221—223
m_i	1	3	6	10	4

Построить гистограмму выборки.

Решение. Из приведенных выше данных видно, что частотные интервалы одинаковы $h_1=h=2B$. Поэтому в соответствии с $\widehat{p_i}/h=m_i/n\cdot h$ получим: $\widehat{p_1}/h=1/24\cdot2=0,0208$; $\widehat{p_2}/h=3/24\cdot2=0,0624$; $\widehat{p_3}/h=0,125$; $\widehat{p_4}/h=0,208$; $\widehat{p_5}/h==0,0834$. Для построения гистограммы отложим по оси абсцисс указанные частотные интервалы и на каждом из них построим прямоугольник высотой p_i/h; $i=1$, 2, 3, 4, 5. Например, над интервалом 219—221 прямоугольник имеет высоту 0,208. Гистограмма выборки изображена на рис. 7.19.

118. Генеральная совокупность распределения по нормальному закону с неизвестными параметрами m и σ: $p_1(x)=(2\pi\sigma^2)^{-1/2}\exp[-(x-m)^2/\sigma^2]$. Вычислить по независимой выборке $X_1, X_2, \ldots, X_n$ оценки неизвестных параметров m и σ: 1) методом моментов; 2) методом максимального правдоподобия.

Решение. Нормальная плотность вероятности определяется двумя параметрами m и σ^2.

1. Параметры m и σ^2 представляют собой, соответственно, начальный момент первого порядка m_1 и центральный момент второго порядка m_2^0: $m_1=m$, $m_2^0=D(x)=\sigma^2$. Начальный эмпирический момент первого порядка равен выборочной средней $m_1=m_x$, а центральный момент второго порядка — выборочной дисперсии $m_2=D(x)$. Приравняв в соответствии с методом моментов теоретиче-

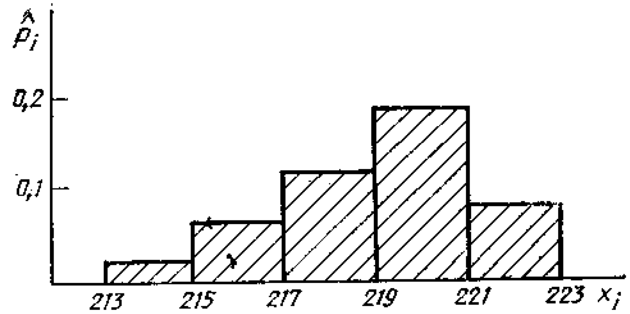

Рис. 7.19

ские и выборочные моменты, получим оценки параметров нормального распределения:

$$m = m_x,\ \sigma = \sqrt{D(x)}.$$

2. В соответствии с $L(\lambda) = \prod_1^n p_1(x_i \lambda)$ функция правдоподобия имеет вид

$$L(m, \sigma) = \prod_1^n p_1(x_1, m, \sigma) = (\sigma\sqrt{2\pi})^{-n} \prod_1^n \exp[-(x_i - m)^2/2\sigma^2] =$$

$$= (\sigma\sqrt{2\pi})^{-n} \exp\left[-\sum_1^n (x_i - m)^2/2\sigma^2\right],$$

а логарифмическая функция правдоподобия:

$$\ln L(m, \sigma) = n \ln \sigma - \frac{n}{2}\ln(2\pi) - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_1^n (x_i - m)^2.$$

Используя формулу $\partial \ln L(\lambda, \ldots, \lambda_k)\partial\lambda$, получаем систему двух уравнений относительно m и σ^2:

$$\frac{\partial \ln L(m, \sigma)}{\partial m} = -\frac{1}{2\sigma^2}\sum_1^n \frac{\partial (x_i - m)^2}{\partial m} = \frac{1}{\sigma^2}\left(\sum_1^n x_i - nm\right) = 0,$$

$$\frac{\partial \ln L(m, \sigma)}{\partial \sigma} = -\frac{n}{\sigma} + \frac{1}{\sigma^3}\sum_1^n (x_i - m)^2 = 0.$$

Отсюда находим: $m = \frac{1}{n}\sum_1^n X_i = m_x$;

$$\sigma^2 = \frac{1}{n}\sum_1^n (x_i - m)^2 = \frac{1}{n}\sum_1^n (x_i - m_x)^2 = D(x).$$

В данном случае оценки, найденные по методу моментов и по методу максимального правдоподобия, совпадают. Они являются состоятельными, причем первая из них несмещенная, а вторая — смещенная.

119. Произведено 16 независимых измерений случайной величины X, распределенной по нормальному закону. По выборке найдена выборочная средняя $m_x^* = 4{,}1$. Оценить неизвестное математическое ожидание m_x случайной величины X по выборочной средней при помощи доверительного интервала с надежностью $p = 0{,}95$, если: 1) среднее квадратическое отклонение величины X известно и равно единице; 2) среднее квадратическое отклонение σ_x неизвестно, а выборочное среднее квадратическое отклонение величины (X) $s = 1$.

Решение. 1. По условию, $p = 0{,}95$. Следовательно, $\Phi(z_p) = (1 + p)/2 = 0{,}975$. Из приложения 1 находим значение $z_p = 1{,}96$, которому соответствует $\Phi(z_p) = 0{,}975$. Определим точность оценки $\delta = z_p \sigma_x/\sqrt{n} = 1{,}96 \cdot \sqrt{16} = 0{,}49$ (В). В соответствии с формулой $m_x^* - z_p \sigma/\sqrt{n} < m_x^* < m_x^* + z_p \sigma/\sqrt{n}$ при $m_x^* = 4{,}1$ доверительный интервал имеет доверительные границы: $m_x = 4{,}1 - 0{,}49 = 3{,}61$; $m_x^* + 0{,}49 = 4{,}1 + 0{,}49 = 4{,}59$. Таким образом, значения неизвестного параметра m_x, согласующиеся с данными выборки, удовлетворяют неравенству: $3{,}61 < m_x < 4{,}59$.

2. Случайная величина $T = (m_x^* - m_x)\sqrt{n}/s$ подчиняется t-распределению Стъюдента с $k = n - 1$ степенями свободы. Поэтому доверительный интервал строится по формуле $m_x^* - t_{\alpha/2} \cdot s/\sqrt{n} < m_x^* < m_x^* + t_{\alpha/2}/s \cdot \sqrt{n}$, $k = n - 1$. По условию, $k = n - 1 = 16 - 1 = 15$, $\alpha = 1 - p$, $\alpha/2 = (1 - p)/2 = (1 - 0{,}95)/2 = 0{,}025$. Из приложения 1 получаем: $t_{0,025} = 2{,}131$. Тогда доверительные границы равны $m_x^* - t_{\alpha/2} s/\sqrt{n} = 4{,}1 - 2{,}131 \cdot 1/4 \approx 3{,}57$; $m_x^* + t_{\alpha/2} \cdot s/\sqrt{n} = 4{,}1 + 2{,}131 + 1/4 \approx 4{,}63$. В данном случае с надежностью $p = 0{,}95$ неизвестный параметр заключен в доверительном интервале: $3{,}57 < m_x < 4{,}63$.

120. Произведено четыре измерения дальности до неподвижной цели с помощью радиолокатора, в результате получены следующие данные: 2470, 2490, 2580, 2520 м. Оценить точность радиолокатора при надежности оценки $p = 0{,}95$.

Решение. Определим выборочные характеристики m_x и s^2. По формулам

$$m_x = \frac{1}{n}\sum_1^n x_i \text{ и } S^2 = \frac{n}{n-1} D(x)$$

имеем $m_x = 2515$ (м), $s^2 = 2300$ (м²).

По приложению 4 для $k = 3$, $\alpha/2 = (1 - p)/2 = (1 - 0{,}95)/2 = 0{,}025$ и $1 - p/2 = 0{,}975$, находим $\chi^2_{\alpha/p} = 9{,}35$, $\chi^2_{0,975} = 0{,}216$. Границами доверительного интервала для дисперсии σ^2 являются: $k \cdot s^2/\chi^2_{\alpha/2} = 736$, $k \cdot s^2/\chi^2_{1-\alpha/2} = 31900$. Тогда 736 м² $< \sigma_x^2 <$ 31900 м. Оценка среднего квадратического отклонения $\sqrt{736} < \sigma < \sqrt{31900}$ или 27,2 м $< \sigma <$ 178 м. Результат показывает, что для определения точности радиолокатора четырех измерений мало.

121. Ошибки 500 результатов измерений дальности по цели радиодальномером приведены ниже:

Интервал h_i . .	−25; −15	−15; −5	−5; 5	5; 15	15; 25
Число ошибок в интервале . . .	50	130	200	100	20
Относительная частота p_i . . .	0,10	0,26	0,40	0,20	0,04

Требуется: 1) построить гистограмму $\hat{p}(x)$ и эмпирическую функцию распределения $\hat{F}(x)$ ошибок измерения дальности; 2) аппроксимировать выборочное распределение с помощью нормального закона; 3) пользуясь критерием согласия χ^2 с уровнем значимости $\alpha = 0{,}01$ проверить согласованность теоретического и эмпирического распределений.

Решение. 1. По условию число интервалов $f = 5$, а длина интервалов $h = 10$ м. Используя формулы $\hat{F}(x) = p(X < x) = m_i/n$ и $p_i/h = m_i/(n \cdot h)$, данные, приведенные выше и методику, изложенную в примерах 116, 117, строим гистограмму и функцию распределения $F(x)$, графики которых соответственно изображены на рис. 7.20.

2. По методу моментов заменим теоретические параметры m_x и σ^2 их выборочными характеристиками m_x^* и $D(x)$. Последние определим по формулам

$$m_x^* = \frac{1}{n}\sum m_i a_i \text{ и } D(x) = \frac{1}{n}\sum_1^5 m_i a_i^2 - (m_x^*)^2.$$

$$m_x^*=-20\cdot 0{,}1-10\cdot 0{,}26-0\cdot 0{,}40+10\cdot 0{,}20+20\cdot 0{,}04=-1{,}8 \ (\text{м});$$

$$D^*(x)=100\cdot 0{,}1+100\cdot 0{,}26+100\cdot 0{,}2+400\cdot 0{,}04-3{,}24=98{,}76 \ (\text{м}),$$

где a_i — середины интервалов: —20, —10, 0, 10, 20. Тогда выражения оценок плотности вероятности и функции распределения будут иметь вид $p_1(x)=(2\pi\sigma^2)^{-1/2}\exp[1-(x-m_x)^2/2\sigma^2=(2\pi\cdot 98{,}76)^{-1/2}\exp[-(x+1{,}8)^2/2-98{,}76]$, $F(x)=\Phi(x+1{,}8/9{,}93)$.

3. Для определения меры расхождения необходимо вычислить вероятности $p_i=\Phi\left(\frac{x_i+m_x}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{x_i-m_x}{\sigma}\right)$, где x_i, x_{i+1} — границы i-го интервала, а $\Phi(x)$ находится из приложения 1. Например, для четвертого интервала (5,15) имеем:

$$\hat{p}_4=\Phi\left(\frac{15+1{,}8}{9{,}93}\right)-\Phi\left(\frac{5+1{,}8}{9{,}93}\right)=0{,}2012.$$

Результаты вычисления остальных вероятностей приведены ниже:

h_i, м	—25, —15	—15, —5	—5, 5	5, 15	15,25
p_i	0,0821	0,2818	0,3794	0,2012	0,0417

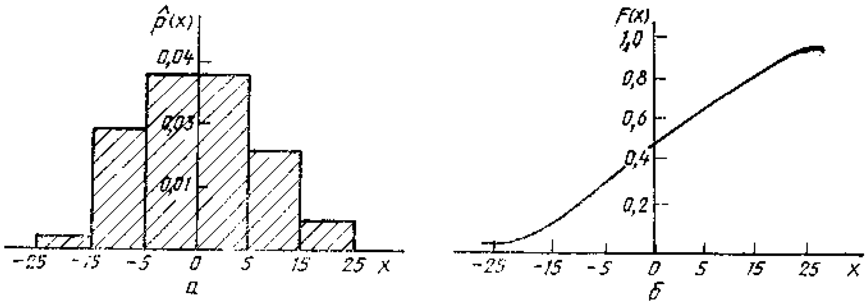

Рис. 7.20

Подставив соответствующие значения в формулу $\chi^2=\sum_1^5\frac{(m_i-np_i)}{np_i}$ получим расхождение $\chi^2=\sum_1^5\frac{(m_i-np_i)^2}{np_i}=3{,}427$. Оценочными значениями заменены два параметра нормального распределения. Поэтому число степеней свободы $k=5-1-2+2$. Из приложения при $k=2$, $\alpha=0{,}01$ находим $\chi^2_\alpha=\chi^2_{0{,}01}=9{,}21$. Так как $\chi^2=3{,}427<\chi^2_\alpha=9{,}21$, то гипотезу о том, что ошибка измерения распределена по нормальному закону, можно считать правдоподобной.

122. По двоичному каналу связи с помехами передаются две цифры: 1 и 0. Вероятности передачи этих цифр равны $p(1)=p(0)=1/2$. Из-за наличия помех возможны искажения. Вероятности перехода единицы в единицу и нуля в нуль соответственно равны: $p(1/1)=p$, $p(0/0)=q$. Определить закон распределения вероятностей случайной величины X — однозначного числа, которое будет получено на приемном конце в некоторый момент времени.

Ответ: x_i 0 1

p_i . . . . . . $(1-p+q)/2$ $(1-q+p)/2$.

123. Из десяти транзисторов, среди которых два бракованных, случайным образом выбраны два транзистора для проверки параметров. Определить и построить: а) ряд распределения случайного числа X бракованных транзисторов в выборке; б) функцию распределения $F(x)$ случайной величины X.

Ответ: а) X_i . . . 0 1 2

p_i . . . 1/45 16/45 28/45

$$\text{б) } F(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x\leq 0\\ 1/45 & \text{при } 0<x\leq 1\\ 17/45 & \text{при } 1<x\leqslant 2\\ 1 & \text{при } x>2\end{cases}$$

124. Вероятность получения отметки цели на экране обзорного радиолокатора при одном обороте антенны равна p. Цель считается обнаруженной, если получено n отметок. Найти закон распределения случайной величины X-числа оборотов антенны радиолокатора.

Ответ: $p(k)=p(x=k)=C_{k-1}^{n-1}\,p^n(1-p)^{k-n}$, $k=n$; $n+1$; $n+2$.

125. Случайная величина X имеет нормальное распределение с параметрами $m_x=3$, $\sigma=2$. Как изменится плотность вероятности $p(x)$, если параметры примут значения $m_x=-3$, $\sigma=4$.

126. Сообщение передается последовательностью амплитудно-модулированных импульсов с заданным шагом квантования Δ/Δ — наименьшая разность между двумя импульсами. На сообщение накладываются шумы, распределенные по нормальному закону с плотностью вероятности:

$$p(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}.$$

Если мгновенное значение шумов превышает половину шага квантования, то при передаче сообщения возникает ошибка. Определить, при каком минимально допустимом шаге квантования вероятность ошибки из-за шумов не превысит 0,1.

Ответ: $\Delta=3/4\sigma$.

127. Случайная величина X-ошибка измерительного прибора распределена по нормальному закону с дисперсией 16 мВ². Систематическая ошибка прибора отсутствует. Вычислить вероятность того, что в пяти независимых измерениях ошибка X: а) превзойдет по модулю 6 мВ не более трех раз; б) хотя бы один раз окажется в интервале 0,5—3,5 мВ.

Ответ: а) 0,999; б) 0,776.

128. На электронное реле воздействует случайное напряжение с релеевской плотностью вероятности

$$p(x)=\frac{x}{\sigma^2}\,e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}},\quad x>0$$

Какова вероятность того, что сработает схема, если электронное реле сработает всякий раз, когда напряжение на входе превышает 2 В?

Ответ: $p=e^{-2/\sigma^2}$.

129. Определить математическое ожидание m_x и дисперсию σ^2 числа приборов X, имевших отказы за время испытаний на надежность, если испытанию подвергается один прибор, а вероятность его отказа равна q.

Ответ: $m_x=q$, $\sigma_x^2=q(1-q)$.

130. Стрельба ведется по наблюдаемой цели. Вероятность попадания при одном выстреле равна 0,5 и от выстрела к выстрелу не меняется. Вычислить математическое ожидание m_x и дисперсию σ_x^2 случайной величины X-числа попаданий в цель при пяти выстрелах.

Ответ: $m_x=2{,}5$; $\sigma_x^2=1{,}25$.

131. На вход ограничителя воздействует видеоимпульс со случайной амплитудой. Вероятность превышения импульсом уровня ограничения равна p. Рассматривая событие превышения уровня ограничения импульсом как случайную величину X, принимающую значения: 1 (превышение) и 0 (непревышение), определить среднее значение и дисперсию величины X. Найти среднее значение и

1/4 5 Зак. 2625

дисперсию числа y импульсов, превысивших порог, при подаче на вход ограничителя n импульсов.

Ответ: $m_x=p$, $\sigma_x^2=p(1-p)$, $m_y=np$, $\sigma_y^2=np(1-p)$.

132. Вероятность отыскания малоразмерного объекта в заданном районе в каждом вылете равна p. Определить математическое ожидание и дисперсию числа произведенных независимых вылетов, которые выполняются до первого обнаружения цели.

Ответ: $m=1/p$, $\sigma^2=(1-p)/p^2$.

133. На радиомаяк-ответчик в среднем поступает 15 запросов в час. Считая число запросов случайной величиной, распределенной по закону Пуассона, определить вероятность того, что за 4 мин: а) поступит ровно три запроса; б) поступит хотя бы один запрос.

Ответ: а) 0,0613; б) 0,632.

134. Сообщение передается квантованными импульсами с шагом квантования $\Delta=1$ В. Предполагая, что ошибка квантования равномерно распределена в пределах интервала квантования и имеет нулевое среднее значение, определить дисперсию σ^2 (мощность) шума квантования.

Ответ: $\sigma^2=1/12$ В^2.

135. При измерении напряжения гармонического колебания $U(t)=A\sin(\omega t+\varphi)$ ламповым вольтметром, проградуированным в эффективных значениях, стрелка вольтметра из-за наличия помех равномерно колеблется между значениями α_1 и α_2. Вычислить: 1) среднее значение m_α показаний вольтметра; 2) относительную погрешность $\Delta=\sigma_\alpha/m_\alpha$ измерения амплитуды напряжения $U(t)$, где σ_α — среднеквадратическое значение.

Ответ: 1) $m_\alpha=(\alpha_1+\alpha_2)/2$; 2) $\Delta=(\alpha_2-\alpha_1)/\sqrt{3}(\alpha_2+\alpha_1)$.

136. Время безотказной работы самолетного радиоэлектронного оборудования в полете является случайной величиной, распределенной по экспоненциальному закону. Определить вероятность безотказной работы в течение десятичасового полета, если среднее время безотказной работы по статистическим данным составляет 200 ч.

Ответ: 0,951.

137. Дискретная случайная величина X характеризуется рядом распределения:

x	−2	−1	0	1	2
p_i	0,1	0,2	0,3	0,3	0,1

Найти законы распределения случайных величин $y=x^2+1z=|x|$.

Ответ:

y	1	2	5	z_k	0	1	2
p_i	0,3	0,5	0,2	p_k	0,3	0,5	0,2

138. Ряд распределения случайной величины X имеет вид:

x	0	1	2
p_i	0,2	0,5	0,3

Вычислить математическое ожидание и дисперсию случайной величины $Y=1-2X^2$.

Ответ: $m_y=-2{,}4$; $\sigma_y^2=9{,}63$.

139. По одной и той же стартовой позиции противника производится пуск пяти ракет, причем вероятность p попадания в цель при каждом пуске равна 0,8. Построить: 1) ряд распределения числа попаданий; 2) многоугольник распределения; 3) функцию распределения $F(x)$ числа попаданий.

Решение. Случайная величина X (число попаданий в цель) может принять следующие значения: $x_0=0$, $x_1=1$, $x_2=2$, $x_3=3$, $x_4=4$, $x_5=5$. Эти значения случайная величина X принимает с вероятностями p_0, p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, которые в соответствии с формулой равны:

$$p_0=(1-p)^5=0{,}2^5=0{,}00032;$$

$$p_1=C_5' \, p(1-p)^4=5\cdot 0{,}8'\cdot 0{,}2^4=0{,}0064;$$

$$p_2=C_5^2p^2(1-p)^3=10\cdot 0{,}8^2\cdot 0{,}2^3=0{,}0512;$$

$$p_3=C_5^3p^3(1-p)^2=10\cdot 0{,}8^3\cdot 0{,}2^2=0{,}2048;$$

$$p_4=C_5^4p^4(1-p)'=5\cdot 0{,}8^4\cdot 0{,}2=0{,}4096;$$

$$p_5=C_{5}^{5}p^5\cdot 0{,}8^5=0{,}32768.$$

Из вычислений $p_i(x=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5)$ видно, что наиболее вероятно попадание в цель четырьмя ракетами, в то время как промах всеми ракетами маловероятен.

1. Ряд распределения имеет следующий вид:

x_i	0	1	2	3	4	5
p_i	0,00032	0,00640	0,05120	0,20480	0,40960	0,32768

2. В соответствии с рядом распределения вероятностей числа попаданий в цель построен многоугольник распределения, представленный на рис. 7.21, а.

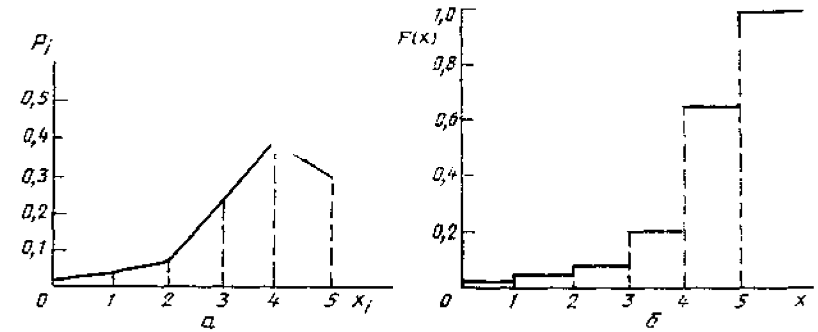

Рис. 7.21

3. По определению функция распределения $F(x)=p(X<x)=\Sigma p(X=x_i)$.

При $x\leqslant 0$, $F(x)=p(X<x)=0$.

При $0<x\leqslant 1$, $F(x)=p(x=x_0=0)=0{,}00032$.

При $1<x\leqslant 2$, $F(x)=p(X=0)+p(x=1)=0{,}00032+0{,}00640=0{,}00672$;

При $2<x\leqslant 3$, $F(x)=0{,}05792$, при $3\leqslant x\leqslant 4$;

$F(x)=0{,}26272$

При $4<x\leqslant 5$, $F(x)=0{,}67232$, при $x>5$, $F(x)=1{,}00$.

График распределения представлен на рис. 7.21, б.

140. Плотность вероятности $p(x)$ случайной величины X имеет вид:

$$p(x)=\alpha\cdot\exp(-\beta|x|);(-\infty<x<\infty).$$

где α и β — постоянные величины. Требуется найти: 1) соотношение, которому должны удовлетворять постоянные α и β; 2) вычислить функцию распределения $F(x)$ случайной величины X; 3) построить графики плотности вероятности $p(x)$ и функции распределения $F(x)$ при $\beta=2$.

Решение. 1. Чтобы найти соотношение между постоянными α и β, воспользуемся условием нормировки для плотности вероятности. При этом учтем, что плотность вероятности имеет разные аналитические выражения при $x<0$, $x>0$.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p(x)dx=\alpha\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\beta|x|}dx=\alpha\left[\int_{-\infty}^{0} e^{\beta x}dx+\int_{0}^{\infty} e^{\beta x}dx\right]=\frac{2\alpha}{\beta}=\Delta.$$

Следовательно, $\beta=2\alpha$.

2. Функция распределения $F(x)$ по определению равна:

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} p(x)dz.$$

$$\text{При}\quad F\overset{x<0}{(x)}=\alpha\int_{-\infty}^{x} e^{\beta z}dz=\frac{\alpha}{\beta}e^{\beta x}=\frac{1}{2}e^{\beta x}.$$

$$\text{При}\quad F\overset{x>0}{(x)}=\frac{1}{2}+\alpha\int_{0}^{x} e^{-\beta z}dz=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}e^{-\beta x}.$$

3. При $\beta=2 p(x)=e^{-2|x|}$, $F(x)=\begin{cases}0{,}5e^{2x} & \text{при } x<0;\\ 1-0{,}5e^{-2x} & \text{при } x>0\end{cases}$

Графики $p(x)$ и $F(x)$ изображены на рис. 7.22.

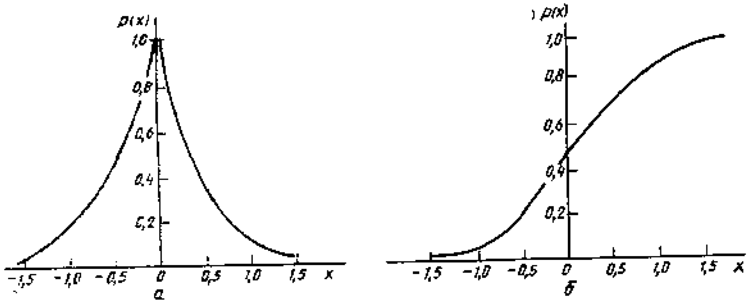

Рис. 7.22

141. Случайная величина X удовлетворяет неравенству $-1\leqslant x\leqslant 1$, причем в интервале от -1 до $+1$ она распределена равномерно, а каждое из значений -1 и $+1$ принимает с вероятностью 1/4. Необходимо: 1) найти и построить функцию распределения $F(x)$ случайной величины X; 2) вычислить вероятность p того, что случайная величина X попадет в интервал от $-1/2$ до $+1/2$.

Решение. По условию X — случайная величина смешанного типа.

1. При $x\leqslant -1$, $F(x)=p(X<x)=0$.

$$\text{При}\quad -1<x\leqslant +1,\ F(x)=p(x=-1)+\int_{1}^{x}p(x)dx=\frac{1}{4}+\int_{-1}^{x}\frac{dx}{4}=$$

$$=\frac{1}{4}+\frac{x+1}{4}=\frac{x+2}{4}.$$

График функции распределения приведен на рис. 7.23.

$$\text{При}\quad x>1\ F(x)=p(x=-1)+\int_{-1}^{+1}\frac{dx}{4}+p(x=1)=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=1.$$

$$2.\qquad p=F\left(\frac{1}{2}\right)-F\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{2+0{,}5}{4}-\frac{2-0{,}5}{4}=\frac{1}{4}.$$

142. Случайные ошибки измерения дальности до неподвижной цели подчинены гауссовому закону с математическим ожиданием $m=0{,}5$ и средним квадратическим отклонением $\sigma=10$ м. Определить вероятность того, что: а) измеренное значение дальности отклонится от истинного не более чем на 15 м; б) при трех независимых измерениях ошибка хотя бы одного измерения не превзойдет по абсолютной величине 15 м.

Решение. а) Определение вероятности того, что измеренное значение дальности отклонится от истинного не более чем на 15 м, сводится к вычислению вероятности попадания случайной величины X (ошибки измерения) с $m=5$ м и $\sigma=10$ м на интервал от -15 до $+15$ м. Используя формулу $p(\alpha<x<\beta)=\Phi\left(\frac{\beta-m}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{\alpha-m}{\sigma}\right)$ и значения $\Phi(\bar{z})$ из приложения 1, получаем

$$p_1=p(|x|<15)=p(-15<x<15)=\Phi\left(\frac{15-5}{10}\right)-\Phi\left(\frac{-15-5}{10}\right)=$$

$$=\Phi(1)-\Phi(2)=\Phi(1)-[1-\Phi(2)]=0{,}8413-1+0{,}9772\approx 0{,}82$$

б) вероятность p_2 того, что при трех независимых измерениях ошибка хотя бы одного измерения не превзойдет по абсолютной величине 15 м, определится по формуле $p_2=1-(1-p_1)^3=1-(1-0{,}82)^3\approx 0{,}994$.

143. Производится стрельба по подвижной цели до первого попадания. Вероятность p попадания при каждом выстреле равна 0,4; на стрельбу отпущено 4 снаряда. Вычислить: 1) математическое ожидание m_x случайной величины X — числа израсходованных снарядов; 2) дисперсию σ^2 и среднее квадратическое значение σ_x величины X.

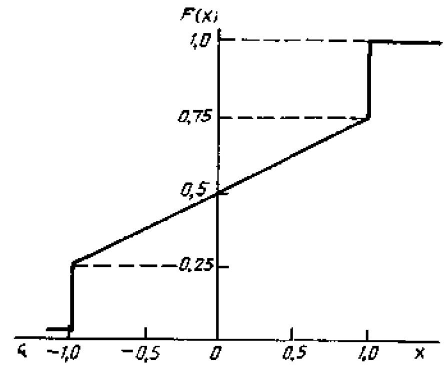

Рис. 7.23

Решение. Случайная величина X может принять следующие значения: $x_1=1$, $x_2=2$, $x_3=3$, $x_4=4$. Вероятности принятия величиной этих значений соответственно равны:

$$p(x=1)=p_1=p=0{,}4;\ p(x=2)=p_2=(1-p)\cdot p=0{,}6\cdot 0{,}4=0{,}24;$$

$$p(x=3)=p_3=(1-p)^2p=0{,}6^2\cdot 0{,}4=0{,}144;$$

$$p(x=4)=p_4=(1-p)^3p+(1-p)^4=0{,}6^3\cdot 0{,}4+0{,}6^4=0{,}216.$$

1. По определению математического ожидания имеем

$$m_x=\sum_{1}^{n}x_ip_i=1\cdot 0{,}4+2\cdot 0{,}24+3\cdot 0{,}144+4\cdot 0{,}216\approx 2{,}2.$$

2. Для дисперсии получим:

$$\sigma_x^2=\sum(x_i-m_x)^2\cdot p_i=(1-2{,}2)^2\cdot 0{,}4+(2-2{,}2)^2\cdot 0{,}24+(3-2{,}2)^2\cdot 0{,}144+$$

$$+(4-2{,}2)^2\cdot 0{,}216\approx 1{,}38,$$

$$\sigma_x=\sqrt{1{,}38}\approx 1{,}17.$$

144. Случайная величина Y является линейной функцией случайной величины X: $Y=g(x)=aX+b$, где a и b — постоянные величины. Найти плотность вероятности $p(y)$ величины Y при известной плотности вероятности $p(x)$ случайной величины X.

Решение. Так как обратная функция $x=h(y)=(Y-b)/a$ однозначна, то подставляя ее выражение в формулу $p(y)=p(x)dx/dy$, получаем

$$p(y)=\frac{1}{|a|}\,p\left(\frac{y-b}{a}\right).$$

Если, например, величина X имеет равномерную плотность вероятности в интервале $|x_1,\ x_2|$, то величина Y будет распределена равномерно в интервале $|ax_1+b,\ ax_2+b|$. Когда величина X имеет нормальную плотность вероятности

$$p(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left[-\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma^2}\right],$$

то ее линейная функция также распределена по нормальному закону

$$p(y)=\frac{1}{\sigma_y\sqrt{2\pi}}\cdot\exp\left[-\frac{y-m_y}{2\sigma_y^2}\right]^2.$$

где $m_y=a\cdot m+b$, $\sigma_y=|a|\sigma$. Таким образом, при линейном преобразовании случайной величины ее плотность смещается на величину b, а масштабы вдоль координатных осей изменяются в a раз.

145. Случайная величина X описывается биномиальным законом распределения вероятностей. Найти математическое ожидание m_y и дисперсию σ_y^2 случайной величины e^{ax}.

Решение. Случайная величина X может принимать значения 0, 1, 2, ..., n. Вероятность $p_n(k)$ того, что она примет значение k, определится выражением: $p_n(k)=C_n^k p^k q^{n-k}, q=1-p$. Используя формулы $m_y=\Sigma g(x_i')p_i$ и $\sigma_y^2=\sum_1^n[g(x_i)-m_y]^2 p_i$, получим

$$m_y=\sum_k g(x_k)p_k=\sum_0^n y_k p_n(k)=\sum_0^n e^{ak}e_n^k p^k q^{n-k}=(q+p\cdot e^a)^n;$$

$$\sigma_y^2=\sum_0^n y_k^2 p_n(k)-m_y^2=\sum_0^n C_n^k\cdot(pe^{2a})^k q^{n-k}-m_y^2=$$
$$=(q+p\cdot e^{2a})^n-(q+p\cdot e^a)^{2n}.$$

146. Шкала милливольтметра имеет цену деления, равную $c=20$ мВ/дел. Какова вероятность отсчитать по этому прибору напряжение с погрешностью Δa более 5 мВ, если известно, что отсчет производится с точностью до целого деления с округлением в ближайшую сторону.

Решение. Пусть показание прибора равно a (рис. 7.24). Так как при отсчете показание округляется в ближайшую сторону, погрешность округления составит Δa. Ее максимальное значение будет равно половине цены деления, при этом распределение погрешности подчиняется равномерному закону в пределах половины деления с плотностью распределения

$$f(\Delta a)=\frac{1}{(a_2-a_1)/2}=\frac{1}{c/2}=\frac{1}{10}=0,1\frac{1}{\text{мВ}}.$$

Функция распределения

$$F(\Delta a)=\frac{1}{c/2}(a-a_1)=0,1\cdot\Delta a.$$

Вероятность того, что полученная при округлении погрешность будет превышать значение 5 мВ, определяется как $p(\Delta a>5)=1-F(\Delta a)=1-0,1\cdot5=0,5$.

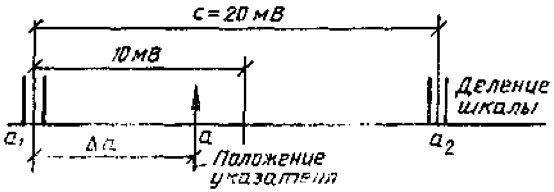

Рис. 7.24

147. Круговой лимб измерительного прибора имеет цену деления 1′. Какова вероятность того, что погрешность будет в пределах ±10′, если отсчет округляется до ближайшей риски?

Ответ: $p=1/3$.

148. Вес младшего разряда показания на табло цифрового вольтметра поразрядного уравновешивания равен 1 мВ. Определить вероятность того, что результат измерения будет сопровождаться погрешностью дискретизации, меньшей 0,25 мВ, считая, что показания прибора округляются в сторону большего целого значения (в пределах младшего разряда). Закон распределения погрешности дискретизации — равномерный. Оценить среднее квадратическое отклонение погрешности дискретности.

Ответ: $p=1/4$; $\sigma=0,58$ мВ.

149. Вес младшего разряда показания цифрового табло электронно-счетного частотомера ЧЭС при измерении интервалов времени равен 1 мкс. Определить вероятность того, что результат измерения длительности импульса будет отличаться от действительного значения не более чем на ±0,5 мкс. Найти среднее квадратическое отклонение погрешности автоматического округления. Считать, что в ЧЭС отсутствует синхронизация переднего фронта импульса с заполняющими импульсами кварцевого генератора. Погрешностью кварцевого генератора пренебречь.

Решение. Из условия задачи следует, что погрешность «автоматического округления» Δt определяется суммой погрешностей $\Delta t_1'$ и Δt_2 (рис. 7.25). Из рисунка следует, что $\Delta t=\Delta t_1'+\Delta t_2=T_x-T_0=T_x-(N-1)\cdot\tau$ или $\Delta t^1+\Delta t_2=T_x-N\tau+\tau$. Из этого равенства видно, что показания N на табло частотомера пропорциональны T_x с учетом Δt_1 и Δt_2: $N\tau=T_x+(\tau-\Delta t_1)-\Delta t_2=T_x+(\Delta t_1-\Delta t_2)$. Так как распределения каждой из погрешностей Δt_1 и Δt_2 подчиняются равномерному закону в интервале τ, распределение суммарной погрешности $\Delta t=\Delta t_1-\Delta t_2$ будет подчиняться закону СИМПСОНА — треугольному закону (рис. 7.26), для которого функция плотности распределения

$$f(\Delta t)=\begin{cases}0 & \text{при } \Delta t<-\tau\\ (\Delta t+\tau)/\tau^2 & \text{при } -\tau<\Delta t<0\\ (\tau-\Delta t)/\tau^2 & \text{при } 0<\Delta t<+\tau\\ 0 & \text{при } \Delta t>+\tau\end{cases}$$

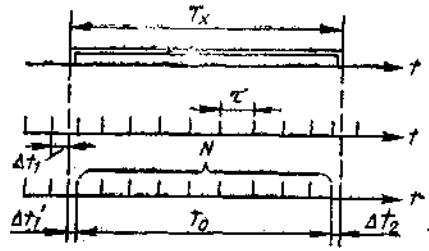

Рис. 7.25

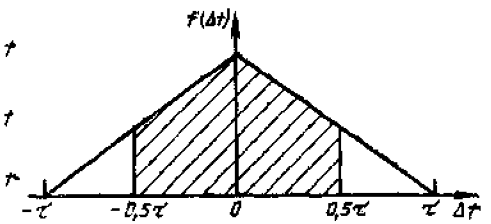

Рис. 7.26

Так как $F(\Delta t)=\int_{-\tau}^{\Delta t} f(\Delta z)dz$, то

$$F(\Delta t)=\begin{cases}0 & \text{при } \Delta t<-\tau\\ (\Delta t+\tau)^2/2\tau^2 & \text{при } -\tau<\Delta t<0\\ [1-(\tau-\Delta t)^2]/2\tau^2 & \text{при } 0<\Delta t<+\tau\\ 1 & \text{при } +\tau<\Delta t\end{cases}$$

Найдем вероятность того, что погрешность «округления» будет в пределах 0,5 мкс (при $\tau=1$ мкс);

$$p(|\Delta t|<0,5\ \text{мкс})=F(\Delta t<+0,5\ \text{мкс})-F(\Delta t<-0,5\ \text{мкс})=$$
$$=\left(1-\frac{(1-0,5)^2}{2\cdot1^2}-\frac{(0,5+1)^2}{2\cdot1^2}\right)=0,75.$$

Среднее квадратическое отклонение погрешности вычислим по формуле

$$\sigma(\Delta t)=\frac{\tau}{\sqrt{6}}=\frac{1\,\text{мкс}}{\sqrt{6}}=0{,}41\ \text{мкс}.$$

150. Определить вероятность того, что погрешность измерения частоты электронно-счетным частотомером не превысит $\pm 0{,}2$ Гц, если известно, что время измерения составляет 1 с. Вычислить среднее квадратическое отклонение погрешности дискретизации. Погрешностью кварцевого генератора пренебречь.

Ответ: $p=0{,}36$; $\sigma(\Delta f)=0{,}41$ Гц.

151. Определить среднее квадратическое отклонение действительного значения частоты сигнала генератора СВЧ от значения, установленного по его шкале, если известно, что погрешность установки частоты характеризуется только случайной составляющей, имеющей нормальный закон распределения, при этом с вероятностью 0,8 она не выходит за пределы $\Delta=\pm 20$ МГц.

Решение. Из условия задачи следует, что $p(|\Delta|<20)=0{,}8$, но $p(|\Delta|<20)=p(\Delta<+20)-p(\Delta<20)$. Вероятности неравенства в правой части выразим через нормированную функцию распределения

$$p(|\Delta|<20)=\Phi\left(\frac{+20}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{-20}{\sigma}\right)=2\Phi_0\left(\frac{20}{\sigma}\right)=0{,}8,$$

где $\Phi_0(\frac{20}{\sigma})$ — нормированная функция Лапласа.

Так как $\Phi_0=0{,}4$, по приложению 1 находим значение квантиля $\frac{20}{\sigma}=1{,}28$, откуда $\sigma=20/1{,}28=15{,}6$ (МГц).

152. Погрешность частоты кварцевого генератора электронно-счетного частотомера не должна превышать $\delta_{доп}=5\cdot 10^{-7}$. Известно, что в среднем уход частоты генератора для данного типа ЧЭС в течение межповерочного интервала составляет $\bar{\delta}=3\cdot 10^{-7}$ со средним квадратическим отклонением $\bar{\sigma}$, равным $1{,}21\cdot 10^{-7}$. Определить среднее число ЧЭС, которое будет признано годным в результате поверки, если в течение года поверяется метрологической службой 120 приборов. Погрешностью образцовых средств измерения пренебречь.

Решение. Средняя вероятность признания электронно-счетных частотомеров годными $\bar{p}=\bar{m}/n$, где $n=120$ — общее количество поверяемых ЧЭС; $\bar{m}$ — среднее число ЧЭС, признанных годными. Вероятность признать ЧЭС годными равна вероятности того, что погрешность кварцевого генератора δ будет меньше допускаемой $\delta_{доп}$,

$$\text{т. е.}\quad p(\delta<\delta_{доп})=\bar{p}=\frac{\bar{m}}{n}$$

или
$$p(\delta<5\cdot 10^{-7})=\Phi\left(\frac{\delta_{доп}-\bar{\delta}}{\sigma}\right)=\Phi_0\left(\frac{\delta_{доп}-\bar{\delta}}{\sigma}\right)+0{,}5=\frac{\bar{m}}{n}.$$

Подставляя исходные данные, получим

$$\Phi_0\left(\frac{5\cdot 10^{-7}-3\cdot 10^{-7}}{1{,}21\cdot 10^{-7}}\right)+0{,}5=\frac{\bar{m}}{120}$$

$$\text{или}\ \Phi_0(1{,}65)+0{,}5=\frac{\bar{m}}{120}.$$

По приложению 3 находим $\Phi_0(1{,}65)=0{,}4505$. Среднее число ЧЭС, признанных годными по результатам поверки, $\bar{m}=120(0{,}4505+0{,}5)=114$.

153. Известно, что среднее квадратическое отклонение относительной погрешности установки частоты, распределенной по нормальному закону, для достаточно большой совокупности измерительных генераторов одного типа равно 0,8%. Допускаемое значение погрешности установки частоты $\pm 2\%$. Определить процент приборов, забракованных в результате проведенных поверок, считая,

что погрешности используемых образцовых средств пренебрежимо малы, а среднее значение погрешности установки частоты для генератора равно нулю.

Ответ: $Q=1{,}2\%$.

154. При поверке достаточно большого количества электронных вольтметров одного типа установлено, что относительные погрешности 90% приборов не превосходят предельно допускаемой погрешности, равной $\pm 4\%$. Определить среднее квадратическое отклонение относительной погрешности вольтметров, считая ее нормально распределенной с нулевой средней погрешностью.

Ответ: $\sigma=2{,}42\%$.

155. Найти вероятность ложного брака при периодической поверке низкочастотных генераторов при определении основной погрешности установки выходного напряжения. Для решения задачи примем допущение, что погрешности всех представленных на поверку приборов находятся в пределах допуска, равного $\pm 1{,}5\%$. Предел допускаемой погрешности образцового вольтметра равен $\pm 0{,}5\%$. Распределения погрешностей поверяемого и образцового средств измерений описываются равномерным законом в указанных в условиях пределах.

Решение. Для принятия решения о годности или негодности поверяемого генератора необходимо определить его погрешность и сопоставить с допускаемым значением, при этом следует иметь в виду, что полученная в результате измерения погрешность будет определяться алгебраической суммой фактических погрешностей поверяемого и образцового средств измерений. Так как конкретные значения этих погрешностей неизвестны, их следует считать случайными. Случайной будет и суммарная погрешность, имеющая распределение, форма которого обусловлена композицией исходных законов распределения. По условиям задачи распределения погрешностей поверяемого и образцового средств измерений подчинены равномерным законам с параметрами $\delta_{пов}$ и $\delta_{обр}$. Композиция этих законов даст трапецеидальное распределение суммарной погрешности, которое описывается следующей функцией плотности распределения:

$$f(\delta)=\begin{cases} 0 & \text{при } \delta\leqslant-\delta_{пов}-\delta_{обр};\\ (\delta_{пов}+\delta_{обр}+\delta)/4\delta_{пов}\delta_{обр} & \text{при } -\delta_{пов}-\delta_{обр}\leqslant\delta\leqslant\delta_{обр}-\delta_{пов};\\ 1/2\delta_{пов} & \text{при } \delta_{обр}-\delta_{пов}\leqslant\delta\leqslant\delta_{пов}-\delta_{обр};\\ (\delta_{пов}+\delta_{обр}-\delta)/4\delta_{пов}\delta_{обр} & \text{при } \delta_{пов}-\delta_{обр}\leqslant\delta\leqslant\delta_{пов}+\delta_{обр};\\ 0 & \text{при } \delta\geqslant\delta_{пов}+\delta_{обр}, \end{cases}$$

где $\delta_{пов}$ и $\delta_{обр}$ — пределы допускаемых погрешностей поверяемого и образцового средств измерений; δ — текущее значение суммарной погрешности. Так как при поверке задается соотношение допускаемых погрешностей образцового и поверяемого средств измерений, т. е. $\delta_{обр}/\delta_{пов}$, запишем функцию плотности распределения в виде (рис. 7.27):

$$f(\delta)=\begin{cases} 0 & \text{при } \delta\leqslant-\delta_{пов}(1+\alpha);\\ \dfrac{1}{4\delta_{пов}^2\cdot\alpha}[\delta_{пов}(1+\alpha)-\delta] & \text{при } -\delta_{пов}(1+\alpha)\leqslant\delta\leqslant-\delta_{пов}(1-\alpha);\\ \dfrac{1}{2\delta_{пов}} & \text{при } -\delta_{пов}(1-\alpha)\leqslant\delta\leqslant\delta_{пов}(1-\alpha);\\ \dfrac{1}{4\delta_{пов}\alpha[\delta_{пов}(1+\alpha)-\delta]} & \text{при } \delta_{пов}(1+\alpha)\leqslant\delta\leqslant\delta_{пов}(1+\alpha);\\ 0 & \text{при } \delta\geqslant\delta_{пов}(1+\alpha). \end{cases}$$

Для определения вероятности ложного брака необходимо вычислить интеграл функции $f(\delta)$ и найти разницу

$$p(\delta>|\delta_{пов}|)=1-p(|\delta_{пов}|>\delta)=1-\int_{-\delta_{пов}}^{+\delta_{пов}}f(\delta)d\delta.$$

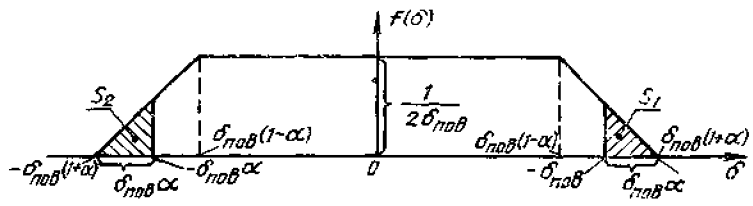

Рис. 7.27

Определим эту вероятность геометрическим способом. Основание заштрихованного треугольника равно $\delta_{пов}\alpha$, его высота равна половине высоты трапеции. Следовательно, площадь каждого заштрихованного треугольника $S_1=S_2=$ $=\frac{1}{2}\delta_{пов}\alpha\,\frac{1}{4\delta_{пов}}=\frac{1}{8}\alpha$. Вероятность неравенства $\delta>|\delta_{пов}|$ будет равна сумме площадей S_1 и S_2, т. е. $p(\delta>|\delta_{пов}|)=S_1+S_2=\alpha/4$. По условию задачи $\alpha=1/3$, следовательно, вероятность забраковать поверяемый генератор равна $p=1/4\cdot 1/3=1/12=0{,}083$.

156. По условию предыдущей задачи определить вероятности ложного брака при соотношении допускаемых погрешностей образцового и поверяемого средств измерений, равном 1/2, 1/4, 1/5, 1/10.

Ответ: $p=0{,}125$; 0,062; 0,05; 0,025.

157. Определить вероятность забракования измерительного прибора по результатам периодической поверки. Известно, что за время эксплуатации в течение межповерочного интервала параметры приборов данного типа ухудшились, что привело к расширению границ распределения погрешности $\delta_{пов}$ этих приборов по сравнению с допускаемым пределом $\delta_{доп}$ в k раз. При этом соотношение предела допускаемой погрешности $\delta_{обр}$ образцового средства измерения к допускаемому пределу погрешности $\delta_{доп}$ поверяемого выбрано равным α. Распределение погрешностей поверяемого и образцового средств измерений равномерное.

Решение. Решение данной задачи аналогично решению задачи 155. Так как границы распределения погрешности $\delta_{доп}$ поверяемого средства измерения увеличились по сравнению с допускаемыми $\delta_{доп}$, необходимо определить параметры трапецеидального распределения суммарной погрешности. Найдем отношение $\delta_{обр}/\delta_{пов}$, которое определяет границы распределения. Так как $\alpha_{обр}=\frac{\delta_{пов}}{\alpha\cdot\delta_{доп}}$ и $\delta_{пов}=k\delta_{доп}$, то $\frac{\delta_{обр}}{\delta_{пов}}=\frac{\alpha\cdot\delta_{доп}}{k\delta_{доп}}=\frac{\alpha}{k}=\beta$. В этом случае функция плотности распределения будет иметь вид (рис. 7.28)

$$\Delta_1=\delta_{пов}-\delta_{доп}=\delta_{пов}-\frac{\delta_{пов}}{k}=\delta_{пов}\left(1-\frac{1}{k}\right);$$

$$\Delta_2=\delta_{пов}(1+\beta)-\delta_{пов}=\delta_{пов}\beta,$$

$$\Delta=\delta_{пов}(1+\beta)-\delta_{пов}(1-\beta)=2\delta_{пов}\beta.$$

Для определения вероятности неравенства $\delta>|\delta_{доп}|$ необходимо найти суммарную площадь заштрихованных треугольников $S=S_1+S_2$. Основание треугольника равно

$$\Delta_1+\Delta_2=\delta_{пов}\left(1-\frac{1}{k}+\beta\right)=\delta_{пов}\left(1-\frac{1}{k}+\frac{\alpha}{k}\right)=\frac{\delta}{k}(k-1+\alpha).$$

Высоту треугольника h найдем из подобия большого полностью незаштрихованного и заштрихованного треугольников

$$\frac{h_0}{h}=\frac{\Delta}{\Delta_2+\Delta_1}=\frac{2\delta_{пов}\beta}{\frac{\delta_{пов}}{k}(k-1+\alpha)}=\frac{2k\beta}{(k-1+\alpha)}=\frac{2\alpha}{(k-1+\alpha)}.$$

Но $h_0=\frac{1}{2\delta_{пов}}$, тогда $h=\frac{k-1+\alpha}{2\alpha\cdot 2\delta_{пов}}$.

Площади треугольников S_1 и S_2 равны

$$S_1=h(\Delta_1+\Delta_2)=\frac{k-1+\alpha}{2\alpha\cdot 2\delta_{пов}}\cdot\frac{\delta_{пов}}{k}(k-1+\alpha)=\frac{(k-1+\alpha)^2}{4k\alpha}=S_2.$$

Тогда $p(\delta>|\delta_{доп}|)=S_1+S_2=\frac{(k-1+\alpha)^2}{4k\alpha}$ (при $k\leqslant 1+\alpha$).

158. По условию предыдущей задачи определить вероятность забракования средства измерения при его поверке, если известно, что $k=\delta_{пов}/\delta_{доп}=1{,}2$ и $\alpha=\delta_{обр}/\delta_{доп}=0{,}3$.

Ответ: $p=0{,}173$.

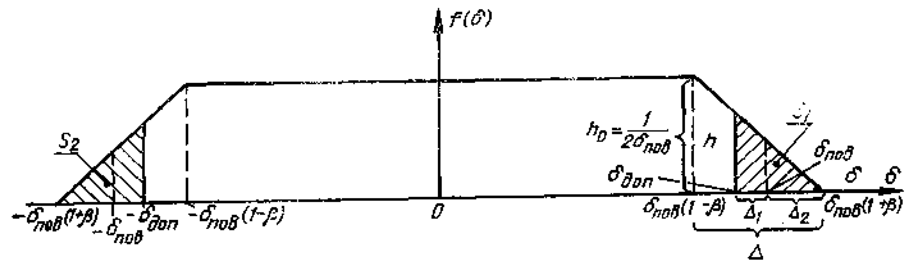

Рис. 7.28

8. ОБРАБОТКА РЕЗУЛЬТАТОВ ИЗМЕРЕНИЙ

8.1. ОБРАБОТКА РЕЗУЛЬТАТОВ МНОГОКРАТНЫХ ИЗМЕРЕНИЙ

а) Прямые равноточные измерения.

Задача обработки результатов измерений заключается в нахождении приближенного значения или оценки измеряемой величины X и указания ее среднего квадратического отклонения. Если измерения проводились по одной и той же методике средствами измерений одинаковой точности при постоянных внешних условиях, то такие измерения называются равноточными. Для них справедливо равенство

$$\sigma_1^2=\sigma_2^2=\ldots=\sigma_n^2=\mathrm{const}$$

для всех членов ряда.

При таких измерениях, дающих уже упомянутый ряд измеренных значений величины $x_1, x_2, \ldots, x_n$, находят:

1) среднее арифметическое значение $\bar{x}$

$$M(X) \approx \bar{x} = \frac{\sum_{1}^{n} x_i}{n}$$

или

$$M(X) \approx \bar{x} = x_0 + \frac{\sum_{1}^{n} \varepsilon_i}{n},$$

где $\varepsilon_i = x_i - x_0$;

2) среднее квадратическое отклонение

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}{n-1}};$$

3) среднее квадратическое отклонение σ_x среднего арифметического

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}};$$

4) доверительный интервал по числу измерений n и доверительной вероятности p для найденного значения $\bar{x}$ с помощью таблиц Стъюдента

$$\Delta = t_p \cdot \sigma_{\bar{x}}.$$

Пример 1. Произвести обработку результатов измерений сопротивления одноомной катушки сопротивления при заданной доверительной вероятности $p=0{,}95$. Значения приведены в табл. 8.1. Значения x_i даны в омах, для других величин принята единица измерения $1 \cdot 10^{-6}$ Ом.

Таблица 8.1

x_i	ε_i	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$
1,000390	+2	−2	4
391	+3	−1	1
395	+7	3	9
392	+4	0	0
389	+1	−3	9
396	+8	4	16
388	0	−4	16
389	+1	−3	9
393	+4	1	1
394	+6	2	4
$x_0 = 1{,}000388$	36	−3	69

$$\bar{x} = 1{,}000388 + \frac{36}{10} = 1{,}0003916 \approx 1{,}000392;$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{69}{10-1}} = \sqrt{7{,}7} = 2{,}8;$$

$$\sigma_x = \frac{2{,}8}{\sqrt{9}} = 0{,}88.$$

Для $p=0{,}95$ коэффициент доверительной вероятности $t_p = 2{,}26$, тогда $\Delta = 2{,}26 \cdot 0{,}88 = 1{,}11$ и $\bar{x} \pm \Delta = 1{,}000392 \pm 1{,}11 \cdot 10^{-6}$ (Ом).

Прямые неравноточные измерения. В некоторых случаях одну и ту же величину необходимо измерить различными методами и средствами измерений. Тогда точность и, соответственно, дисперсии нескольких полученных значений будут различны ($\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2 \neq \neq \ldots \neq \sigma_n^2$).

Объединение результатов таких измерений заключается в нахождении так называемого среднего взвешенного или весового среднего. Последнее является той оценкой искомого значения величины, которое при заданных результатах измерений x_1, x_2, $x_3, \ldots, x_n$ и их дисперсиях $\sigma_1^2, \sigma_2^2, \ldots, \sigma_n^2$ имеет минимальную дисперсию.

Взвешенное среднее $\bar{x}_p$ определяют по формуле

$$\bar{x}_p = \frac{p_1 x_1 + p_2 x_2 + \ldots + p_n x_n}{p_1 + p_2 + \ldots + p_n} \tag{8.1}$$

или

$$\bar{x}_p = x_0 + \frac{\varepsilon_1 p_1 + \varepsilon_2 p_2 + \ldots + \varepsilon_n p_n}{p_1 + p_2 + \ldots + p_n}. \tag{8.2}$$

В краткой форме:

$$\bar{x}_p = x_0 + \frac{\sum_{1}^{n} \varepsilon_i p_i}{\sum_{1}^{n} p_i}, \tag{8.3}$$

в которой p_i определяет «вес» i-го измерения.

Вес измерения, или степень доверия может быть вычислен по формуле

$$p_i = \frac{1}{\sigma_i^2}, \tag{8.4}$$

т. е. принимается обратно пропорциональным его дисперсии. Обычно числитель в формуле (8.4) выбирается таким, чтобы частное от деления было небольшим и удобным для последующих расчетов.

Подстановка (8.4) в (8.3) дает:

$$\bar{x}_p = x_0 + \frac{\sum_{1}^{n} p_i \varepsilon_i}{\sum_{1}^{n} p_i} = \frac{x_0 + \sum_{1}^{n} \frac{\varepsilon_i}{\sigma_i^2}}{\sum_{1}^{n} \frac{1}{\sigma_i^2}}. \tag{8.5}$$

Значение среднего квадратического отклонения находят по формуле

$$\sigma_p = \sqrt{\frac{\sum_{1}^{m} p_i (x_i - \overline{x}_p)^2}{m-1}} \tag{8.6}$$

где m — число групп измерений, а

$$\sigma_{\overline{x}_p} = \frac{\sigma_p}{\sqrt{\sum_{1}^{m} p_i}} . \tag{8.7}$$

Пример. Выполнено четыре серии измерений одной и той же величины в различных условиях и получены следующие значения $x_1 = 10{,}24$, $\sigma_1 = 0{,}054$; $x_2 = 9{,}98$, $\sigma_2 = 0{,}125$; $x_3 = 10{,}07$, $\sigma_3 = 0{,}059$; $x_4 = 10{,}33$, $\sigma_4 = 0{,}057$. Найти средневзвешенное значение и произвести оценку точности.

Решение. Разместим данные для вычислений в табл. 8.2.

Таблица 8.2

x_i	σ_i	p_i	ε_i	$\varepsilon_i p_i$	$x_i - \overline{x}_p$	$(x_i - \overline{x}_p) p_i$	$(x_i - \overline{x}_p)^2 p_i$
10,24	0,054	0 690	0,29	0,200	—0,038	—0,026	0,004
9,98	0,125	0,128	0,03	0,004	0,222	+0,028	0,006
10,07	0,059	0,588	0.12	0,070	—0,150	—0,088	0,013
10,33	0,057	0,625	0,38	0,238	+0,128	0,080	0,010
Итого		2,031		0,512			0,033

$$p_1 = \frac{0{,}002}{(0{,}054)^2} = \frac{0{,}002}{0{,}0029} = 0{,}690; \quad p_2 = \frac{0{,}002}{(0{,}125)^2} = \frac{0{,}002}{0{,}0156} = 0{,}128;$$

$$p_3 = \frac{0{,}002}{(0{,}059)^2} = \frac{0{,}002}{0{,}0034} = 0{,}588; \quad p_4 = \frac{0{,}002}{(0{,}057)^2} = \frac{0{,}002}{0{,}0032} = 0{,}625$$

$$\overline{x}_p = 9{,}95 + \frac{0{,}512}{2{,}031} = 9{,}95 + 0{,}252 = 10{,}202;$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{0{,}033}{3}} = \sqrt{0{,}011} = 0{,}104;$$

$$\sigma_{\overline{x}_p} = \frac{0{,}104}{\sqrt{2{,}03}} = \frac{0{,}104}{1{,}42} = 0{,}06.$$

Косвенные измерения. При косвенных измерениях уравнения измерения (возьмем для простоты расчетов функцию двух аргументов) имеют вид:

$$A = f(X, Y), \tag{8.8}$$

т. е. искомую величину не измеряют, а вычисляют по результатам измерений других величин. При этом погрешность величины A зависит не только от погрешностей величин X, Y, но и от вида функциональной зависимости. При математической разработке этих вопросов устанавливают приемы, которые дают возможность вычислить погрешность функции, зная погрешности

аргументов. Если искомая величина A есть функция величин X, Y, которые не зависят друг от друга и погрешности которых имеют нормальное распределение и достаточно малы, то можно приближенно заменить величину A членами нулевого и первого порядка ряда Тейлора.

Приближенное значение измеряемой величины находят по формуле

$$\overline{a} = f(\overline{x}, \overline{y}), \tag{8.9}$$

где $\overline{x}$, $\overline{y}$ — средние арифметические значения, полученные по результатам прямых измерений.

При равноточных измерениях

$$\overline{x} = \frac{\sum_{1}^{n} x_i}{n};$$

$$\overline{y} = \frac{\sum_{1}^{n} y_i}{n}$$

при неравноточных измерениях

$$\overline{x}_p = \frac{\sum_{1}^{n} p_i x_i}{\sum_{1}^{n} p_i}$$

и

$$\overline{y}_p = \frac{\sum_{1}^{n} p_i y_i}{\sum_{1}^{n} p_i}$$

Затем по известным формулам находят $\sigma^2_{\overline{x}}$ и $\sigma^2_{\overline{y}}$ и вычисляют дисперсию и среднее квадратическое отклонение величины $\overline{a}$ по формулам:

$$\sigma^2_{\overline{a}} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 \sigma^2_{\overline{x}} + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 \sigma^2_{\overline{y}};$$

$$\sigma_{\overline{a}} = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 \sigma^2_{\overline{x}} + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 \sigma^2_{\overline{y}}}\,, \tag{8.10}$$

где df/dx, df/dy — частные производные по составляющим аргументам при средних значениях аргумента.

Граница интервала, в котором с заданной вероятностью находится случайная погрешность результата измерения: $\Delta = t \cdot \sigma_{\overline{a}}$, где t — коэффициент, выбираемый по таблице Лапласа.

Пример. Определить среднее квадратическое отклонение вычисленной длины модулированного светового потока λ, если известны скорость света $c = 299792{,}5$ км/с со средним квадратическим отклонением $\sigma_c = 0{,}4$ км/с и частота $f = 10000{,}0$ кГц со средним квадратическим отклонением $\sigma_f = 0{,}15$ кГц.

Решение. Так как $\lambda = \frac{c}{f}$, то

$$\sigma_\lambda = \sqrt{\frac{\sigma_c}{f^2} + \frac{c^2}{f^4}\sigma_f^2}, \text{ откуда } \sigma_\lambda = \sqrt{\sigma_c^2 + \lambda^2\sigma_f^2} \cdot \frac{1}{f};$$

$$\sigma_\lambda = \frac{1}{10^4} \cdot \sqrt{(0{,}4)^2 + (30 \cdot 0{,}15)^2} \approx \frac{30 \cdot 0{,}15}{10000};$$

$$\sigma_\lambda = 0{,}00045 \text{ (м)}, \ \frac{\sigma_\lambda}{\lambda} = \frac{0{,}00045}{30} \approx \frac{1}{67000} \approx 0{,}0002.$$

8.2. КРИТЕРИИ ОЦЕНКИ ГРУБЫХ ПОГРЕШНОСТЕЙ

Источником грубых погрешностей нередко бывают ошибки, допущенные оператором во время измерений. К ним можно отнести:

неправильный отсчет по шкале измерительного прибора, происходящий из-за неверного учета цены малых делений шкалы;

неправильная запись результата наблюдений, неправильная запись значений отдельных мер использованного набора, например, гирь.

Эти грубые погрешности, как правило, возникают при однократных измерениях и обычно устраняются путем повторных измерений.

Причинами больших, грубых погрешностей могут быть внезапные и кратковременные изменения условий измерения или оставшиеся незамеченными неисправности в аппаратуре.

Вопрос о том, содержит ли результат наблюдений грубую погрешность, решается общими методами проверки статистических гипотез. Проверяемая гипотеза состоит в утверждении, что результат наблюдения x_i не содержит грубой погрешности, т. е. является одним из значений измеряемой величины. Пользуясь определенными статистическими критериями, пытаются опровергнуть выдвинутую гипотезу. Если это удается, то результат наблюдений рассматривают, как содержащий грубую погрешность, если нет — то не исключают.

Для выявления грубых погрешностей задаются вероятностью α того, что сомнительный результат действительно мог иметь место в данной совокупности результатов измерений. Эту вероятность α называют уровнем значимости; $\alpha = 1 - p$. Обычно α выбирают равным 0,100; 0,050 и по приложению 6 с учетом числа измерений n находят $t_г$. Его сравнивают с вычисленными значениями t, которые определяют по формуле

$$t = \frac{\max|x_i - \bar{x}|}{\sigma}, \qquad (8.11)$$

где
$$\bar{x}_i = \frac{\sum\limits_1^n x_i}{n}, \quad \sigma = \sqrt{\frac{\sum\limits_1^n (x_i - \bar{x})^2}{n-1}}.$$

Если окажется, что $t < t_г$, то в результатах отсутствует грубая погрешность, в противном случае ($t > t_г$) результат содержит грубую погрешность и его из обработки исключают.

Пример. Определить, содержится ли грубая погрешность в следующих результатах шестикратного взвешивания изделия: 72,361; 72,357; 72,352; 72,346; 72,344; 72,340 (г) при доверительной вероятности $p = 0{,}975$.

Решение. При $\bar{x} = 72{,}350$ г; $\sigma = 0{,}0081$ г вычислим

$$t = \frac{72{,}361 - 72{,}350}{0{,}0081} = \frac{0{,}011}{0{,}0081} = 1{,}375.$$

При $\alpha = 0{,}025$ и $n = 6$ найдем $t_{табл} = 2{,}10$

Грубых погрешностей в результатах нет.

Вопросы для самопроверки

1. Какие измерения называются равноточными? Поясните на примере.
2. Как вычисляется среднее арифметическое значение? Напишите формулу.
3. Напишите формулу для вычисления случайного отклонения результата наблюдения.
4. Как вычисляется среднее квадратическое отклонение? Напишите формулу.
5. Поясните, что такое доверительный интервал и доверительная вероятность.
6. Как определить доверительный интервал, если задана доверительная вероятность?
7. Как произвести обработку результатов прямых измерений при малом числе наблюдений?
8. Как обнаружить наличие в ряде измерений грубых погрешностей и промахов?
9. Что собой представляют неравноточные измерения?
10. Что такое вес измерений? Какие существуют критерии для установления веса результата неравноточных измерений?
11. Как определить среднее квадратическое отклонение среднего взвешенного значения?
12. Как определяется среднее взвешенное значение? Напишите формулу для его вычисления.
13. Как производится обработка результатов косвенных измерений?
14. Перечислите основные правила округления результата измерений.
15. Перечислите основные показатели точности измерений.
16. Какие установлены способы выражения точности измерений в соответствии с ГОСТ 8.011—72?
17. Какие установлены формы представления окончательного результата измерений?

ЗАДАЧИ И ПРИМЕРЫ К РАЗД. 8

1. По результатам измерения угла 81°35′26″; 81°35′32″; 81°35′24″; 81°35′28″; 81°35′33″; 81°35′25″; 81°35′31″; 81°35′22″; 81°35′34″; 81°35′29″; 81°35′25″; 81°35′30″ определить средний результат, среднее квадратическое отклонение результата измерений.

Ответ: 81°35′28″2; 1″12.

2. При исследовании мерного прибора было произведено 12 измерений одной и той же линии: 160,07 м; 160,16 м; 160,11 м; 160,03 м; 160,12 м; 160,04 м;

160,14 м; 160,07 м; 160,13 м; 160,09 м; 160,15 м; 160,00 м. Определить среднее значение, среднее квадратическое отклонение результата измерений.

Ответ: 160,092 м; 14,7 мм.

3. При проведении исследований мерного прибора было произведено 12 измерений одной и той же величины: 28,184 мм; 28,174 мм; 28,180 мм; 28,172 мм; 28,176 мм; 28,178 мм; 28,172 мм; 28,170 мм; 28,180 мм; 28,174 мм; 28,176 мм. Определить среднее значение, среднее квадратическое отклонение результата измерений.

Ответ: 28,1762 мм; 0,0012 мм

4. Повторные измерения силы тока дали следующие результаты: 3,20; 3,15; 3,17; 3,12; 3,08; 3,18; 3,09; 3,14; 3,10; 3,30; 3,19 mA. Определить среднее значение тока, среднеарифметическую и вероятностную погрешность ряда измерений.

Ответ: 3,16 mA; ±0,05 mA; ±0,04 mA.

5. Многократные измерения напряжения дали следующие результаты: 54,2; 54,0; 53,8; 54,3; 54,1; 54,9; 54,0; 54,4; 54,0; 53,6; 54,0 mV. Определить средний результат, среднеквадратичную и вероятную погрешности ряда измерений.

Ответ: 54,13 mV; ±0,36 mV; ±0,24 mV.

6. Измерения сопротивления образцового резистора дали следующие результаты: $R_i = 1002$; 1005; 1001; 1004; 1006; 1003; 1005; 1004Ω. Вычислить сопротивление резистора и среднеквадратичные погрешности полученного ряда и среднего результата измерений.

Ответ: 1003,8Ω; ±1,7Ω; ±0,6Ω.

7. Измеряя емкость образцового конденсатора, получили следующие результаты: $e_i = 1{,}0005$; 1,0000; 0,9980; 0,9992; 0,9998; 0,9997; 1,0003; 0,9998; 1,0002; 1,0005μF. Вычислить емкость конденсатора, среднеквадратичные погрешности ряда измерений и среднего результата.

Ответ: 0,9998μF; ±0,0007μF; ±0,0023μF.

8. По данным задачи 6 определить среднеквадратичное отклонение в ряду измерений, принимая, что $R_{ср} = 1000Ω$ и полученный ответ сравнить с ответом указанной задачи.

Ответ: ±1,67Ω.

9. По условиям задачи 7 определить среднеквадратичное отклонение результатов ряда измерений, принимая, что $C_{ср} \approx 1{,}0\mu F$, и ответ сравнить с ответом указанной задачи.

Ответ: 0,00075μF.

10. При поверке точности показаний амперметра было получено: действительное значение силы тока 8,0 А: показания поверяемого прибора — 7,98; 7,96; 8,03; 7,95; 8,04; 8,06; 7,92; 8,05; 8,01 и 7,94 А. Определить среднеквадратичное отклонение в ряду результатов.

Ответ: ±0,05 А.

11. Определяя ток перегорания предохранителей новой партии, получили следующие результаты:

Ток перегорания, mA	96	97	98	99	100	101	102	103	104	105	106
Количество предохранителей . . .	3	4	9	10	13	10	8	8	2	2	1

Оценить среднее значение тока перегорания, среднее квадратичное отклонение результатов и погрешность среднего результата.

Ответ: 100,3mA; ±2,3mA; ±0,3mA.

12. Длина линии, полученная 6 раз с различными среднеквадратичными погрешностями, приведена в табл. 8.3. Определить средневесовое значение и среднеквадратичное отклонение результата.

Таблица 8.3

№ линии	l, м	σ, мм	$p=\frac{10}{\sigma^2}$	ε, мм	$p\varepsilon$	δ, мм	$p\delta$, мм	$p\delta^2$	$(p\varepsilon)\delta$
1	271,729	±6,3	0,25	+12	3,00	—1,3	—0,33	0,43	—3,90
2	271,722	8,4	0,14	+ 5	0,70	+5,7	+0,80	4,56	+3,99
3	271,717	9,1	0,12	0	0	+10,7	+1,28	13,70	0
4	271,732	4,3	0,54	+15	8,10	—4,3	—2,32	9,98	—34,83
5	271,730	5,2	0,37	+13	4,81	—2,3	—0,85	1,96	—11,06
6	271,720	7,5	0,18	+ 3	0,54	+7,7	+1,39	10,70	+4,16
	271,717						+3,47		+8,15
$\frac{\Sigma p\varepsilon}{\Sigma p}$	+10,7						—3,50		—49,79
x	271,7277		Σ 1,60		17,15		—0,03	41,33	—41,64

$$\frac{\Sigma p\varepsilon}{\Sigma p} = \frac{+17{,}15}{1{,}60} = +10{,}72;\ \beta = x_{\text{принятое}} - x_{\text{точное}} = -0{,}01875 = -0{,}02\ \text{мм};$$

$$(\Sigma p)\cdot\beta = -0{,}03\ \text{мм}.$$

Как видим, вследствие ошибок округления контроль сходится весьма приближенно. Можно показать, что этот контроль уточняется следующим образом: $\Sigma p\delta^2 = -\{\Sigma p\varepsilon\delta - (\Sigma p\varepsilon)\cdot\beta\}$.

В данном случае 2-й и 3-й члены последнего равенства будут —41,64—17,15 (—0,01875) = —41,32.

Более рациональная схема вычислений дана в табл. 8.4, по которой и рекомендуется вести вычисления. Здесь применен более четкий контроль вычисления $\Sigma p\delta^2$, а при получении $p\delta^2$ нет лишних знаков. Ограничиваться вычислением $\Sigma p\delta$ не следует, так как не будет контроля основной операции — вычисления весового среднего, а также величин δ и остатков ε.

Таблица 8.4

№ линии	l, м	σ, мм	$p=\frac{10}{\sigma^2}$	ε, мм	$p\varepsilon$, мм	$p\varepsilon^2$	δ, мм	$p\delta$, мм	$p\delta^2$
1	271,729	±6,3	0,25	+12	3,00	36,0	—1,3	—0,33	0,4
2	271,722	8,4	0,14	+ 5	0,70	3,5	+5,7	+0,80	4,6
3	271,717	9,1	0,12	0	0	0	+10,7	+1,28	13,7
4	271,732	4,3	0,54	+15	8,10	121,5	—4,3	—2,32	10,0
5	271,730	5,2	0,37	+13	4,81	62,5	—2,3	—0,85	2,0
6	271,720	7,5	0,18	+ 3	0,54	1,6	+7,7	+1,39	10,7
l_0	271,717							+3,47	
$\frac{\Sigma p\cdot e}{\Sigma p}$	+10,7							—3,50	
x	271,7277		1,60		17,15	221,1		—0,03	41,4

$$\frac{\Sigma p\varepsilon}{\Sigma p} = \frac{17,15}{1,60} = +10,72;$$

$$\beta = x_{\text{принятое}} - x_{\text{точное}} = -0,02 \text{ мм};$$

$$(\Sigma p)\cdot\beta = -0,03 \text{ мм}; \quad \Sigma p\delta^2 = \Sigma p\varepsilon^2 - \frac{\Sigma p\varepsilon^2}{\Sigma p} = 225,1 - \frac{294,1}{1,6} = 41,3;$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma p\delta^2}{n-1}} = \pm\sqrt{\frac{41,4}{6-1}} = \pm 2,9 \text{ мм};$$

$$\sigma_p = \frac{\sigma}{\sqrt{2(n-1)}} = \pm\frac{2,9}{\sqrt{2(6-1)}} = \pm 0,92 \text{ мм};$$

$$\sigma_1 = \pm\sqrt{c} = \pm\sqrt{10} = \pm 3,2 \text{ мм}.$$

13. При исследовании новых теодолитов был измерен угол различным числом приемов. В табл. 8.5 даны средние арифметические $\overline{x}$, числа приемов n, средние квадратические ошибки результата измерения из одного приема σ. По этим данным определить вероятнейшее значение угла $\overline{x}_p$ и произвести оценку точности полученных результатов.

Таблица 8.5

№ п/п	x	n	σ	$M=\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$	$p=\frac{1}{M^2}$	ε	$p\varepsilon$	$p\varepsilon^2$	δ	$p\delta$	$p\delta^2$
1	62°43′07″	7	±4″	±1″,5	0,44	0″	0	0	+2″,6	+1″,14	3,0
2	62°43′12″	11	6	1 8	0,31	+5	1,55	7,8	−2,4	−0,74	1,8
3	62°43′08″	6	5	2,0	0,25	+1	0,25	0,2	+1,6	+0,40	0,6
4	62°43′14″	9	7	2,3	0,19	+7	1,33	9,3	−4,4	−0,84	3,7
5	62°43′10″	3	3	1,7	0,35	+3	1,05	3,2	−0,4	−0,14	0,1
6	62°43′09″	12	9	2,6	0,15	+2	0,30	0,6	+0,6	+0,09	0,0
x_0	62°43′07″									+1,63	
$\frac{\Sigma p\varepsilon}{\Sigma p}$	+2″,6									−1,72	
$\overline{x}_p$	62°43′09″,6			Σ	1,69		4,48	21,2		+0,09	9,2

$$\frac{\Sigma p\varepsilon}{\Sigma p} = \frac{+4,48}{1,69} = +2'',65;$$

$$\beta = x_{\text{принятое}} - x_{\text{точное}} = -0'',05; \quad (\Sigma p)\cdot\beta = 1,69(-0,05) = -0'',085;$$

$$\Sigma p\delta^2 = \Sigma p\varepsilon^2 - \frac{\Sigma p\varepsilon^2}{\Sigma p} = 21,1 - \frac{20,1}{1,69} = 9,2;$$

$$\sigma = \pm\sqrt{\frac{9,2}{5}} = \pm 1'',35; \quad \sigma_{p_i} = \pm\frac{1'',35}{\sqrt{10}} = \pm 0'',43;$$

$$\sigma_p = \pm\frac{1,35}{\sqrt{1,69}} = \pm 1'',04.$$

Ответ: 62°43′09″,6±1″,04.

14. По условию предыдущей задачи найти вероятнейшее значение угла и произвести оценку точности результатов по одному из вариантов, данных в табл. 8.6.

Таблица 8.6

№ п/п	x	Варианты 1		2		3		4		5	
		n	σ	n	σ	n	σ	n	σ	n	σ
1	74°36′06″	4	±5″,1	5	±4″,2	6	±3″,1	7	±3″,5	5	±4″,5
2	74°36′11″	10	6,3	11	5,4	12	4,5	10	5,5	9	6,5
3	74°36′08″	8	4,1	7	4,5	5	5,2	6	7,5	5	5,5
4	74°36′15″	6	3,5	8	4,2	7	5,4	5	3,6	4	4,5
5	74°36′10″	4	2,5	3	2,7	5	2,5	4	3,5	3	4,0
6	74°36′05″	2	5,4	4	3,3	3	4,2	6	2,5	4	3,5

Продолжение

№ п/п	x	Варианты 6		7		8		9		10	
		n	σ	n	σ	n	σ	n	σ	n	σ
1	74°36′06″	6	±4″,3	5	±6″,2	6	±4″,5	7	±5″,5	4	±5″,5
2	74°36′11″	9	5,2	10	7,1	12	5,5	13	6,5	11	4,5
3	74°36′08″	4	3,4	5	3,5	5	4,5	4	2,5	3	3,5
4	74°36′15″	8	6,3	9	7,2	6	6,4	8	5,1	9	4,4
5	74°36′10″	3	2,8	4	3,4	3	3,5	2	4,5	5	3,5
6	74°36′05″	11	7,5	10	8,0	13	6,5	12	8,5	11	6,5

Ответ: 74°36′10″,4; 1″32; 3″,8.

15. По приведенным в табл. 8.7 результатам измерения угла определить вероятнейшее значение угла, средние квадратические ошибки каждого результата и окончательного вывода.

Таблица 8.7

№ п/п	x	Число приемов n	$p=\frac{k}{3}$	ε	$p\varepsilon$	$p\varepsilon^2$	δ	$p\delta$	$p\delta^2$	$\sigma_i=\frac{\sigma}{\sqrt{p}}$
1	76°32′16″	6	2	+10″	+20″	200	−6″	−12″	72	±3″,6
2	76°32′9″	18	6	+3	+18	54	+1	+6	6	±2 ,1
3	76°32′6″	3	1	0	0	0	+4	+4	16	±5 ,1
4	76°32′10″	15	5	+4	+20	80	0	0	0	±2 ,3
5	76°32′13″	6	2	+7	+14	98	−3	−6	18	±3 ,6
6	76°32′8″	12	4	+2	+8	16	+2	+8	16	±2 ,5
x_0	76°32′06″							+18		
$\frac{\Sigma p\varepsilon}{\Sigma p}$	+4″,0							−18		
	76°32′10″,0		Σ 20		+80″	448		0	128	

$$\frac{\Sigma p\varepsilon}{\Sigma p} = \frac{+80}{20} = +4'',0; \ \beta = 0; \ \Sigma p\delta^2 = \Sigma p\varepsilon^2 - \frac{(\Sigma p\varepsilon)^2}{\Sigma p} =$$

$$= 448 - \frac{6400}{20} = 128; \quad \sigma = \pm\sqrt{\frac{128}{5}} = \pm 5'',1;$$

$$\sigma_i = \pm\frac{5,1}{\sqrt{10}} = \pm 1'',6; \ \sigma_p = \pm\frac{5,1}{\sqrt{20}} = \pm 1'',14.$$

Ответ: $\bar{x}_p = 76°32'10'',0 \pm 1'',14$.

Замечание. В данном случае целесообразно для упрощения вычислений взять за веса числа приемов, уменьшенные в 3 раза. Ошибки σ, вычисленные в последнем столбце, представляют собой средние квадратические ошибки соответствующего результата x_i.

16. Случайная величина имеет среднее квадратичное отклонение $\sigma_n = 1$. Определить среднее арифметическое и вероятное отклонения и вероятность, что случайная величина при некотором опыте окажется в пределах от −1 до +2.

Ответ: 0,8; 0,67; 0,82.

17. Случайная величина имеет среднее квадратичное отклонение $\sigma_n = 10$ при $x_0 = 0$. Найти вероятность, что эта величина при некотором опыте окажется в пределах: от −10 до +10; от −20 до +20; от −30 до +30.

Ответ: 68,3 %; 95,6 %; 99,73 %.

18. Случайная величина имеет среднее значение $\bar{x} = 100$ при среднем арифметическом отклонении $\sigma_n = 10$. Вычислить вероятность, что при некотором опыте данная величина окажется в пределах от 90 до 115 и она будет меньше 90.

Ответ: 67,3 %; 21,2 %.

19. Для некоторого метода измерений среднее квадратичное отклонение равно 0,2 %. Определить вероятность того, что погрешность измерения не превышает ±0,5 %, и вероятность того, что эта погрешность больше ±0,6 %.

Ответ: 98,8 %; 0,27 %.

20. При изготовлении резисторов установлено, что среднее квадратичное отклонение их сопротивлений от номинального значения равно 20Ω. Определить, сколько процентов резисторов выходит первым сортом, если для них установлены допустимые отклонения −10Ω...+5Ω.

Ответ: 28 %.

21. В результате поверки амперметра установлено, что 75 % всех погрешностей показаний прибора не превышает ±2,5 мА. Считая распределение погрешностей нормальным, определить среднюю квадратичную погрешность.

Ответ: ±2,2мА.

22. При поверке вольтметра установлено, что 80 % погрешностей результата измерений не превышают ±1V. Считая распределение погрешностей нормальным, определить вероятность того, что погрешность результата больше 1,5V.

Ответ: 2,75 %.

23. Случайная величина имеет среднее квадратичное отклонение σ=20. Определить, в каких пределах при некотором опыте ожидается эта величина, если вероятность этого составляет 50 %.

Ответ: ±13,5.

24. При изготовлении детали допускается количество брака, не превышающее 1 %. Определить в среднем, на какое количество деталей приходится одна бракованная, и доверительный интервал отклонений размеров деталей.

Ответ: 100; ±2,58·σ.

25. Определить, какой величины может достигнуть погрешность отдельного измерения, если погрешности, превышающие это значение, встречаются в среднем 2 раза на каждые 75 измерений, а среднее арифметическое отклонение результатов составляет ±1 %.

Ответ: ±2,76 %

26. Определить, сколько раз необходимо повторить измерения, чтобы в ряду измерений была вероятна погрешность, в 2,5 раза превышающая среднеквадратичную погрешность.

Ответ: 81.

27. Определить, сколько повторных измерений следует провести, чтобы в ряду результатов была вероятна ошибка, превышающая предельную погрешность (3σ).

Ответ: 371.

28. Определить, сколько раз необходимо повторить эксперимент, чтобы хотя бы один раз в ряду результатов встречалась погрешность, превышающая двойное значение среднеквадратичной погрешности с вероятностью не менее 0,6.

Ответ: 14.

29. Оценить минимально необходимое количество измерений мощности, чтобы хотя бы один раз в ряду результатов встречалась погрешность, превышающая ±25 W с вероятностью не менее 0,95, если применялся метод измерения мощности, обеспечивающий среднеквадратичное отклонение результата на ±15 W.

Ответ: 10.

30. Определить вероятность того, что погрешность среднего результата из 50 измерений при среднеквадратичной погрешности, равной 2 %, не превысит ±0,3 %.

Ответ: 71 %.

31. Определить доверительный интервал для среднего значения из 65 измерений, если среднеквадратичная погрешность ряда измерений составляет 4 %, а требуемая доверительная вероятность 95 %.

Ответ: 1 %.

32. Десятикратные измерения сопротивления резистора дали следующие результаты: R_i=406,25; 408,30; 407,45; 407,00; 407,60; 408,07; 408,25; 407,15; 406,84; 407,40. Вычислить сопротивление резистора и доверительный интервал погрешностей при доверительной вероятности p=98 %. При решении задачи считать, что количество измерений достаточно большое.

Ответ: ±1,54Ω.

33. После определения действительной мощности партии электроламп были получены следующие результаты:

Мощность *I* ламп, W	19	21	23	25	27	27	31
Количество ламп	5	11	16	20	17	9	6

Определить среднее значение мощности и вероятную погрешность среднего результата; найти вероятность того, что мощность лампы окажется больше 35,0.

Ответ: 25W; ±0,23W; 0,1 %.

34. Известный метод измерений обеспечивает среднее квадратичное отклонение результатов в пределах ±0,4Ω. Определить: а) пригоден ли метод для однократного измерения сопротивления 200Ω с допускаемой погрешностью ±0,5 % при доверительной вероятности, равной 97,5 %; б) сколько измерений следует провести данным методом, чтобы погрешность среднего результата не превысила ±0,25Ω с доверительной вероятностью, равной 99 %.

Ответ: да; 17.

35. Производятся многократные измерения сопротивления образцового резистора, точное значение сопротивления которого равно 10Ω. За пределами какого интервала значений будет находиться четвертая часть всех результатов измерений, если количество измерений достаточно большое и они имеют нормальное распределение с показателем точности $R = 2{,}5 \cdot \Omega^{-1}$?

Ответ: (10±0,33)Ω.

36. Термопарой измеряется температура печи обжига, которая должна быть равна 1000°С. Определить возможный процент брака, возникающий при отклонении действительной температуры более, чем на ±100°С, если показатель точности распределения результатов измерения термопарой $h = 0{,}012°C^{-1}$.

Ответ: 9 %.

37. При измерении толщины бумажной ленты получены отсчеты с нормальным распределением. За пределами какого интервала находится половина всех отсчетов при их большом количестве, если измерения характеризуются показателем точности $h = 16$ мм$^{-1}$ и толщина ленты составляет 0,1 мм?

Ответ: (0,1±0,03) мм.

38. *Многократные измерения емкости конденсатора показали, что половина всех результатов лежит в пределах от 98 до 102 nF.* Оценить показатель точности измерительной установки и определить предельную погрешность результата, полученного из 10 измерений.

Ответ: $0{,}239^1$/nF; $\pm 2{,}8$ nF.

39. Известно, что выбранный метод измерения напряжения обеспечивает среднеарифметическое отклонение результатов в ряду на $\pm 0{,}001$ V. Определить минимальное количество измерений, при котором среднеквадратичная погрешность среднего результата не превысит 0,36 mV.

Ответ: 12.

40. Применяемый метод измерения тока обеспечивает вероятное отклонение результатов в пределах ± 15 mA. Какое необходимо выбрать количество измерений, чтобы предельная погрешность среднего результата не превысила ± 20 mA?

Ответ: 12.

41. Высотомер, установленный на автоматическом парашюте радиозонда, автоматически раскрывает его на заданной высоте. При раскрытии парашюта на высоте менее 100 м вся аппаратура выйдет из строя. Каков процент случаев поломки аппаратуры ожидается при сбрасывании радиозонда, если высотомер установлен на раскрытие парашюта на высоте 1000 м и он имеет показатель точности срабатывания $h=0{,}00134$?

Ответ: 4,5 %.

42. Выбранный метод измерений сопротивления обеспечивает среднеквадратичное отклонение результатов на $\pm 0{,}5\,\Omega$ при их нормальном распределении. Определить, сколько измерений необходимо сделать, чтобы: а) хотя бы один раз в ряду результатов встречалась погрешность, не превышающая $\pm 0{,}2\,\Omega$ с вероятностью не менее 0,95; б) вероятная погрешность среднего результата не превышала $\pm 0{,}1\,\Omega$.

Ответ: 4; 12.

43. При выполнении лабораторной работы по измерению освещенности рабочего места студент получил следующие результаты: $E=383$; 377; 378 и 386 lx. Определить среднюю освещенность и доверительный интервал среднего результата при доверительной вероятности равной 0,9, принимая, что результаты подчиняются нормальному распределению.

Ответ: (381 ± 5) lx.

44. Шестикратное взвешивание изделия из золота дало следующие результаты: 72,361; 72,357; 72,352; 72,346; 72,344; 72,340 (г). Определить доверительный интервал для среднего результата при доверительной вероятности, равной 0,99.

Ответ: $(72{,}350\pm 0{,}013)$ г.

45. При десяти измерениях индуктивности катушки получены следующие результаты: 358,59; 358,55; 358,53; 358,52; 358,51; 358,48; 358,49; 358,46; 358,45; 358,42 mH. Определить вероятность того, что погрешность среднего результата не выйдет за границы $\pm 0{,}05$ mH.

Ответ: 98,8 %.

46. При измерении напряжения получены следующие результаты: 2790; 2805; 2830; 2785; 2840 mV. Определить доверительную вероятность того, что истинное значение напряжения отличается от $\overline{U}$ не более, чем на 25 mV и доверительный интервал $\pm\Delta u$, соответствующий доверительной вероятности 0,98.

Ответ: 0,916; ± 42 mV.

47. В предыдущей задаче определить вероятность того, что истинное значение напряжения находится в пределах 2800—2830 mV. Вероятность вычислить по формуле Лапласа и Стьюдента.

Ответ: 0,784; 0,721.

48. Определение магнитных потерь для разных образцов некоторой партии трансформаторной стали дало следующие результаты: 12,1; 11,7; 11,8; 11,3; 11,9; 11,4; 12,0 и 11,8 W/kg. Вычислить средние потери данной партии стали и вероятность того, что средний результат лежит в пределах 12,5—12,0 W/kg. Распределение результатов считать неизвестным.

Ответ: 11,75 W/kg; более 84 %.

49. Решить предыдущую задачу при условии, что полученный ряд результатов подчиняется закону *нормального распределения*. Вероятность подсчитать по Лапласу и Стьюденту.

Ответ: 0,988; 0,958.

50. Вычислить средний коэффициент полезного действия трансформатора, если измерения, проведенные при разных режимах, дали следующие результаты: 86; 87; 90; 92; 89; 91 и 88 %. Определить также вероятность того, что средний результат не выходит за границы 89 ± 3 %. Распределение результатов не подчиняется нормальному закону.

51. Решить предыдущую задачу при условии, что распределение результатов подчиняется закону Гаусса, а количество измерений: а) достаточно большое; б) небольшое.

Ответ: 99,97 %; 99 %.

52. По данным задачи 48 проверить ряд результатов на отсутствие промахов, пользуясь разными критериями.

53. Убедиться, не содержит ли ряд результатов, полученных при измерении силы тока (см. задачу 49) промахов. Проверку провести по разным критериям.

54. Измерения индуктивности катушки на высокой частоте дали следующие результаты: 162; 160; 156; 166; 158; 164; 145; 162; 160; 154; 158 mH. Проверить полученный ряд результатов на отсутствие промахов, пользуясь разными критериями.

55. При измерении напряженности электромагнитного поля радиостанции получены следующие значения: 230; 260; 240; 170; 250; 200; 220; 280; 260; 310 μV/m. Проверить ряд на отсутствие промахов, вычислить наиболее вероятное значение напряженности поля и предельную погрешность ряда измерений.

Ответ: 242 μV/m; $\pm 120\,\mu$V/m.

56. *Измерения добротности катушки дали следующие результаты:* 155; 140; 130; 110; 95; 125; 120; 80; 130; 115. Проверить ряд на отсутствие промахов, вычислить наиболее вероятное значение добротности измеряемой катушки и предельную погрешность ряда измерений и среднего результата.

Ответ: 120; ± 66; ± 20.

57. При поверке цифрового герцметра измерялась частота 100 kHz и были *получены результаты:* 100,010; 100,008; 100,006; 100,007; 100,006; 100,005; 100,006; 100,004; 100,006; 100,003 kHz. Определить систематическую и среднеквадратичную погрешности прибора при условии, что измеряемая частота точно равна 100.

Ответ: $+0{,}006$ kHz; $\pm 0{,}002$ kHz.

58. При поверке измерительного конденсатора номинальной емкостью 2000 pF получены следующие результаты: 2010; 2005; 2008; 2020; 2010; 2012; 2004; 2016; 2002; 2013 pF. Определить отклонение емкости конденсатора от номинального значения и среднеквадратичную погрешность измерительной установки.

Ответ: $+10$ pF; ± 6 pF.

59. Определить сопротивление и погрешность резистора, который составлен из двух последовательно соединенных резисторов сопротивлениями $(10\pm 0{,}5)\,\Omega$ и $(20\pm 1)\,\Omega$.

Ответ: 30 Ω; $\pm 1{,}1\,\Omega$.

60. Резистор составлен из двух параллельно соединенных резисторов сопротивлениями 10 Ω и 15 Ω, которые определены с погрешностями $\pm 0{,}5\,\Omega$ и $\pm 0{,}6\,\Omega$ соответственно. Найти сопротивление и погрешность составного резистора.

Ответ: $(6\pm 0{,}53)\,\Omega$.

61. В предыдущей задаче определить вероятность того, что сопротивление составного резистора отличается от своего среднего значения не более чем на 1,5 Ω. Закон распределения погрешностей неизвестен.

Ответ: более 88 %.

62. Требуется получить сопротивление 100 Ω при параллельном соединении трех резисторов сопротивлением 300 Ω. Какие предельные ошибки могут иметь эти резисторы, если ошибка сопротивления составного резистора не должна превышать 0,5 %?

Ответ: 0,3 %.

63. Для получения сопротивления 455 Ω параллельно включены два резистора сопротивлениями 910 Ω. Определить погрешность сопротивления составного резистора, если сопротивление одного резистора определено с погрешностью +0,5 Ω, а другого — с погрешностью — 0,6 Ω.

Ответ: —0,05 %.

64. Найти погрешность определения мощности, если сопротивление измерено с погрешностью ±0,5 %, а напряжение — вольтметром класса 2,5 при отклонении стрелки прибора на 2/3 длины шкалы.

Ответ: ±1,6 %.

65. Определить полное сопротивление резистора на частоте 50±0,5 Hz, если его индуктивность составляет 0,1 H и активное сопротивление 50 Ω. Вычислить погрешность результата, если индуктивность определена с погрешностью ±2 %, а сопротивление ±1,5 %.

Ответ: (59±0,7) Ω.

66. Найти индуктивность катушки и погрешность, с которой она определена, если полное сопротивление катушки (120±2) Ω на частоте (50±0,2) Hz, а активное сопротивление обмотки — (10±0,2) Ω.

Ответ: (0,38±0,007) H.

67. Вычислить индуктивность катушки и погрешность, с которой она получена, если полное сопротивление катушки (50±1) Ω на частоте (50±0,3) Hz, а активное сопротивление (5±0,05) Ω.

Ответ: (0,158±0,003) H.

68. Вычислить погрешность, с которой определено сопротивление проводника, если длина его измерена с погрешностью ±0,1 %, диаметр — ±1 %, а удельное сопротивление материала — ±0,5 %.

Ответ: ±2,1 %.

69. В предыдущей задаче вычислить систематическую погрешность результата, если при измерении длины была допущена систематическая погрешность +0,5 %, а при измерении диаметра — 0,2 %. Удельное сопротивление материала указано ошибочно и имеет погрешность +1 %.

Ответ: +1,9 %.

70. Удельное сопротивление проводника определялось измерением длины, тока, протекающего через проводник, и падения напряжения при диаметре проводника 0,4 мм. Получены следующие результаты измерений:

$$l_1=1{,}0\ \text{м};\quad I_1=100\ \text{мА};\quad U_1=1{,}15\ \text{V};$$
$$l_2=0{,}9\ \text{м};\quad I_2=99\ \text{мА};\quad U_2=1{,}03\ \text{V};$$
$$l_3=0{,}8\ \text{м};\quad I_3=101\ \text{мА};\quad U_3=0{,}92\ \text{V}.$$

Определить относительную предельную погрешность измерений.

Ответ: ±1,34 %.

71. Добротность катушки, измеряемая методом вариации частоты, вычислена по формуле $Q=f_1+f_2/2(f_2-f_1)$. Определить добротность катушки и погрешность его измерения, если получено: $f_1=0{,}95\cdot10^3$Hz; $f_2=1{,}05\cdot10^3$Hz; относительная нестабильность частоты $\delta f=5\cdot10^{-3}$.

Ответ: 10; ±0,07 %.

72. Путем измерения сопротивления проводника при разных температурах необходимо экспериментально определить его сопротивление R_0 при 0 °C и температурный коэффициент α, если при $\Theta_1=10$ °C, $R=10{,}1$ Ω и при $\Theta_2=50$ °C, $R_2=11{,}3$ Ω. Какова ошибка в определении R_0 и α, если сопротивление определялось с точностью до ±0,05 Ω, а температура — с точностью до ±0,5 °C.

Ответ: (9,8±0,1) Ω; $3{,}1\cdot10^{-3}\pm2\cdot10^{-4}$ 1/°C.

73. В предыдущей задаче вычислить систематическую погрешность определения величин R_0 и α, если при измерении температуры систематическая погрешность составила —0,5 °C, а при измерении сопротивления +0,5 %.

Ответ: +0,064 Ω; $-4{,}4\cdot10^{-6}$ 1/$_0$.

74. Вольтметр на номинальное напряжение 150 V подключен к трансформатору напряжения 6000/100. Определить погрешность измерения напряжения, если класс точности прибора 1,5, а трансформатора 1,0. Определить напряжение сети, если вольтметр показал 75 V.

Ответ: (4500±140) V.

75. Для измерения затрат энергии в электрической печи за сутки были замерены: напряжение сети 215 V вольтметром класса 1,5 на номинальное напряжение 300 V и ток 120 A амперметром класса 1,0 на номинальный ток 150 A. Определить энергию, абсолютную и относительную погрешности ее измерения, если время измерялось с точностью до 1 мин.

Ответ: 619±15 kWh; ±2,4 %.

76. Для определения энергии, затрачиваемой в проводнике, были измерены сопротивление, напряжение и время. Определить погрешность измерения энергии, если сопротивление, напряжение и время были измерены со среднеарифметическими погрешностями соответственно: ±0,5; ±1,5 и ±2 %. Найти интервал возможных погрешностей результата, соответствующий доверительной вероятности 95 %.

Ответ: ±3,7 %; ±7 %.

77. Проведены измерения некоторых линейных размеров: $q=41{,}5$ мм; $z=85{,}0$ мм; $h=3{,}6$ мм. Допускаемый предел основной погрешности равен $\Delta_{\text{оп}}=0{,}05$ мм. Величина Y связана с измеренными величинами соотношением $Y=5Q-Z+6H$. Записать результат измерения Y при доверительной вероятности $p=1$. Измерения проведены при нормальных условиях, методические погрешности пренебрежимо малы.

Решение. Вычислим сначала измеренное значение величины I: $I=5q-z+6h=5\cdot41{,}5-85{,}0+6\cdot3{,}6=144{,}1$ (мм). Найдем теперь предельные погрешности измеренных величин Q, Z, H. Так как условия проведения эксперимента нормальные, то дополнительные погрешности равны нулю — $\Delta_{\text{дп}i}=0$. Учитывая, что методические погрешности по условию задачи пренебрежимо малы ($\Delta_{\text{m}}\ll\Delta_{\text{оп}}$), получаем $\Delta_{\text{п}i}=\Delta_{\text{оп}i}+\Delta_{\text{дп}i}+\Delta_{\text{м}i}=\Delta_{\text{оп}}=0{,}05$ мм. Предельная погрешность измерения Y определяется выражением

$$\Delta_{\text{п}Y}=\left|\left(\frac{\partial Y}{\partial Q}\right)\right|\Delta_{\text{п}a}+\left|\left(\frac{\partial Y}{\partial Z}\right)\right|\Delta_{\text{п}Z}+\left|\left(\frac{\partial Y}{\partial H}\right)\right|\Delta_{\text{п}H}.$$

Вычислив соответствующие производные и полагая в соответствии с условием задачи $\Delta_{\text{п}Q}=\Delta_{\text{п}Z}=\Delta_{\text{п}H}=\Delta_{\text{п}}$, получаем $\Delta_{\text{п}Y}=0{,}05(5+1+6)=0{,}6$ (мм). Результат измерений записывается в виде

$$Y=(144{,}1\pm0{,}6)\ \text{мм}.$$

Оценим предельную погрешность измерения величины Y

$$\Delta^2_{\text{п}Y}=\left\{\left(\frac{\partial Y}{\partial Q}\right)^2\Delta_{\text{п}Q}+\left(\frac{\partial Y}{\partial Z}\right)^2\Delta^2_{\text{п}Z}+\left(\frac{\partial Y}{\partial H}\right)^2\Delta^2_{\text{п}H}\right\}^{1/2}.$$

Подставляя числовые значения, получаем

$$\Delta_{\text{п}Y}=0{,}05\sqrt{5^2+1^2+6^2}=0{,}4\ (\text{мм}).$$

Результат измерения записывается в виде $Y=(144{,}1\pm0{,}4)$ мм. Следует иметь в виду, что полученный результат не гарантируется с $p=1$.

78. Оценка мощности, рассеиваемой на резисторе, проводится по формуле $P=U^2/R$. Измерения проведены в нормальных условиях вольтметром B7-16 при времени преобразования $T_{\text{пр}}=20$ мс. Результаты измерения $U=758{,}8$ мВ, $R=5{,}355$ кОм. Записать результат измерения мощности при $P_з=1$.

Решение. Сначала оценим систематическую погрешность измерения напряжения, учитывая, что $R_{\text{вх}}=10$ МОм, $\delta_c=-5{,}355/10005=-0{,}0005$.

Абсолютная погрешность равна $\Theta_{\text{п}}=-U\cdot\delta_c=-0{,}4$ мВ.

С учетом поправки, вносимой в значение напряжения, измеренное значение мощности равно

$$P=U^2/R=(0{,}7592)^2/5355=107{,}63\ \text{мкВт}.$$

(Без учета поправки значение мощности равно $P=107{,}52$ мкВт).

Найдем погрешность измерения мощности. Оценивая погрешность по предельному значению ($P_з=1$), получаем:

$$\delta_{\text{пр}}=2\delta_{\text{п}U}+\delta_{\text{п}R}.$$

Так как условия эксперимента нормальные, то $\delta_{\text{п}}=\delta_{\text{оп}}$. Значение $\delta_{\text{оп}}$ находим по паспортным данным

$$\delta_{опU}=(0{,}05+0{,}05U_k/U_k)\ \%=(0{,}05+0{,}05\cdot 1/0{,}7588)\ \%=0{,}116\ \%;$$

$$\delta_{опR}=(0{,}2+0{,}2R_k/R_k)\ \%=(0{,}2+0{,}02\cdot 10/5{,}355)\ \%=0{,}237\ \%;$$

$$\delta_{пр}=(2\cdot 0{,}116+0{,}237)\cdot 10^{-2}=4{,}69\cdot 10^{-3}.$$

Переходя к абсолютной погрешности, получаем $\Delta_{пр}=107{,}63\cdot 4{,}69\cdot 10^{-3}=0{,}5$ мкВт. Таким образом, результат измерения записывается в виде: $P=(107{,}6\pm 0{,}5)$ мкВт.

79. Полоса пропускания резонансного контура определяется по измеренным значениям частот на границе полосы $\Pi=f_2-f_1$. Определить предельную погрешность измерения частоты, если известны $\Delta_{пf_1}$ и $\Delta_{пf_2}$. Записать в общем виде результат измерения полосы пропускания контура при $P_2=0{,}95$, если известны Θ_{f_1}, Θ_{f_2}, σ_f, σ_{f_1}, $r_{f_1f_2}$.

80. Измерение частоты конденсаторным частотомером производится в соответствии с формулой

$$f=\frac{I_{ср}}{C(U_1-U_2)},$$

где $I_{ср}$ — среднее значение тока заряда конденсатора; C — емкость конденсатора; U_1, U_2 — напряжение на выходе двустороннего ограничителя. Вывести формулу для оценки предельной погрешности измерения частоты, если известны $\Delta_{пI_{ср}}$, $\Delta_{пC}$, $\Delta_{пU_1}$, $\Delta_{пU_2}$.

81. В волноводном методе измерения параметров диэлектрика диэлектрическая проницаемость ε определяется выражением

$$\varepsilon=\left(1+\frac{\Delta_\varphi\lambda_0}{2\pi d}\right)^2,$$

где λ_0 — длина волны в свободном пространстве; d — толщина пластины исследуемого материала; Δ_φ — дополнительный набег фазы за счет пластины.

Систематические погрешности измеренных величин λ_0, d, Δ_φ равны нулю. Вывести формулу для оценки среднеквадратического отклонения погрешности σ_ε, если все измерения независимы.

82. Волновое сопротивление двухпроводной линии рассчитывается по формуле

$$W=120\ \ln(2D/d),$$

где d — диаметр проводников; D — расстояние между центрами проводников.

Вывести формулу для оценки среднеквадратического отклонения погрешности σ_W, если известны σ_d, σ_D.

83. Постоянная времени цепи определяется соотношением

$$\tau=\frac{L(R_1+R_2)}{R_1\cdot R_2}.$$

Погрешности измерений Θ_L, $\Theta_{R1}=\Theta_{R2}=\Theta_R$, σ_L, $\sigma_{R1}=\sigma_{R2}=\sigma_R$, а $r_{R1R2}=r$. В общем виде записать результат измерений r при $p=1$.

84. Методом эллипса фазовый сдвиг определяется соотношением $\varphi=\mathrm{arctg}\,(a/b)$, где a, b — измеренные значения малой и большой осей эллипса на экране осциллографа. Вывести формулу для оценки σ_φ, если известны $\sigma_a=\sigma_b=\sigma$, $r_{ab}=r$.

85. Собственная частота контура определяется выражением

$$f_c=\frac{1}{2\pi\sqrt{L\cdot C}}\sqrt{1-1/4Q^2}.$$

Величины L, C, Q измеряются с погрешностями $\Delta_{пL}$, $\Delta_{пC}$, $\Delta_{пQ}$.

Вывести формулу для оценки предельной погрешности измерения собственной частоты f_c.

86. Осциллограмма напряжения на выходе RC-цепи описывается выражением $U=U_0\cdot e^{-t/\tau}$. В результате осциллографических измерений получены следующие результаты: $U_0=5{,}1$ В, $t=T=15$ мкс, $U(t=T)=1{,}8$ В. Предельные погрешности измерений равны $\delta_{пU}=3\ \%$, $\delta_{пt}=1\ \%$.

Вывести формулу для расчета погрешности измерений постоянной времени цепи. Записать результат измерения.

87. Для задачи 84 рассчитать величину фазового сдвига и записать результат измерения, если измеренные значения малой и большой осей эллипса, соответственно, равны $a=4{,}2$ см, $b=9{,}3$ см, а предельная погрешность измерения линейных размеров равна $\Delta_п=0{,}06$ см.

88. С помощью импульсного рефлектометра постоянная времени нагрузки определяется из выражения

$$\tau=-\frac{T}{\ln(1-U_1/U_2)}.$$

Вывести формулу для оценки среднеквадратического отклонения погрешности σ_τ, если заданы σ_U, σ_T. В результате измерений получены следующие значения величин: $T=185{,}7$ мс, $U_1=15{,}3$ мкВ, $U_2=59{,}9$ мкВ. Записать результат измерений постоянной времени τ при $P=0{,}95$, если погрешности измерения напряжения и индикации времени равны $\sigma_U=0{,}2$ мкВ, $\Theta_U=0{,}3$ мкВ, $\sigma=1{,}5$ нс, $\Theta_T=2$ нс.

89. По результатам 16 измерений частоты получено среднее значение $\overline{f}=506{,}35$ кГц. Погрешность измерения $\sigma=0{,}15$ кГц. Оценить истинное значение измеряемой частоты F с доверительной вероятностью $P=0{,}95$.

Решение. Доверительная оценка истинного значения при известной точности измерения представляется в виде

$$|F-\overline{f}|<t\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}.$$

По приложению 5 для $P=0{,}95$ находим значение коэффициента $t=1{,}96$. Отсюда получаем

$$|F-\overline{f}|=|F-506{,}35|<1{,}96\cdot\frac{0{,}15}{4}=0{,}0735.$$

Результат измерения записывается в виде $F=(506{,}35\pm 0{,}07)$ кГц, $n=16$, $P=0{,}95$. Если доверительную вероятность взять равной $P=0{,}99$, то $t=2{,}576$ и доверительный интервал увеличится. Результат измерения записывается в виде $F=(506{,}350\pm 0{,}097)$ кГц, $n=16$, $P=0{,}99$.

90. Произведено 11 измерений значений напряжения: 46,1, 46,2, 46,1, 45,9, 45,6, 46,1, 45,9, 47,2, 46,2, 46,6, 45,9 мВ. Проверить, содержат ли какие-либо результаты грубые погрешности. Найти точечную и интервальную оценку результата измерения напряжения при $P=0{,}95$.

Решение. Подозрительным является результат $U=47{,}2$ мВ. В соответствии с условием необходимо найти $\overline{U}$ и σ $(n=10)$. Значения $\overline{U}$ и σ рассчитаем по формулам (а) и (б). Расчет значительно упростится, если его проводить не для величин U_i, а относительно подходящим образом выбранного значения U_0. Например, можно выбрать $U_0=46$ мВ. Тогда

$$\overline{U}=U_0+\frac{\sum\limits_1^n(U_i-U_0)}{n}=46+\frac{\sum\limits_1^{10}(U_i-46)}{10}=46{,}06\ \text{мВ}; \qquad (а)$$

$$\sigma=\sqrt{\frac{\Sigma(U_i-\overline{U})^2}{n-1}}=\sqrt{\frac{1}{9}\Sigma(U_i-46{,}06)^2}=0{,}263\ \text{мВ}. \qquad (б)$$

Подставляя найденные значения в формулу (в), получаем

$$t=\frac{|U_{max}-\overline{U}|}{\sigma}=\frac{|47,2-46,06|}{0,263}=4,33. \qquad (в)$$

По приложению 6 для $n=10$ и $P=0,99$ находим $t_{гр}=3,41$. Так как $t=4,33>t_{гр}=3,41$, то делаем вывод, что с вероятностью большей 0,99 результат $U=47,2$ мВ содержит грубую погрешность и его необходимо исключить из рассмотрения.

Точечная оценка результата измерения ($n=10$) определяется уже рассчитанным значением $\overline{U}$ и σ_U, получаемым из (г)

$$\sigma_U=\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\approx\frac{0,263}{\sqrt{10}}=0,083 \text{ (мВ)}. \qquad (г)$$

Результат измерения записывается в виде $U=46,06$ мВ, $\sigma_U=0,083$ мВ, $n=10$. Для интервальной оценки результата измерения по приложению 5 находим значение коэффициента Стьюдента при $P=0,95$ и $n=10$; $t_{ст}=2,262$. Граница доверительного интервала $\varepsilon=t_{ст}\cdot\sigma_U=2,262\cdot0,083=0,19$ (мВ).

Результат измерения записывается в виде $U=(46,06\pm0,19)$ мВ, $n=10$, $P=0,95$. Если доверительную вероятность взять равной $P=0,99$, то $t_{ст}=3,25$ и доверительный интервал расширится. Результат измерения в этом случае запишется в виде $U=(46,06\pm0,27)$ мВ, $n=10$, $P=0,99$.

91. Проведено многократное измерение сопротивления резистора. После предварительной обработки результаты сведены в следующую таблицу:

r_i, кОм	n_i	r_i, кОм	n_i	r_i, кОм	n_i
51,48	2	51,60	8	51,72	18
51,52	4	51,64	12	51,76	8
51,56	6	51,68	30	51,80	7
				51,84	5

где n_i — количество одинаковых результатов r_i.

Оценить коэффициенты асимметрии и эксцесса данного ряда. Полученные значения $\overline{A}$ и $\overline{E}$ использовать для проверки гипотезы о нормальном законе распределения.

Решение. Используя формулы (а) и (б), находим выборочное среднее и выборочную дисперсию:

$$\overline{r}=\frac{1}{100}\sum_{1}^{100}r_i=51,681 \text{ (кОм)};$$

$$\sigma=\sqrt{\frac{1}{99}\sum_{1}^{100}(r_i-51,681)^2}=\sqrt{0,648} \text{ кОм}^2=0,08 \text{ (кОм)}.$$

Найдем эмпирические центральные моменты третьего и четвертого порядков:

$$m_3=\frac{1}{100}\sum_{1}^{100}(r_i-\overline{r})^3=-121,245\cdot10^{-6},$$

$$m_4=\frac{1}{100}\sum_{1}^{100}(r_i-\overline{r})^4=125,787\cdot10^{-6}.$$

Окончательно определяем значения искомых коэффициентов:

$$A=\frac{m_3}{\sigma^3}=-\frac{121,245\cdot10^{-6}}{64,8\cdot10^{-6}\sqrt{64,8}}=-0,232,$$

$$E=\frac{m_4}{\sigma^4}-3=\frac{125,787\cdot10^{-6}}{64,8^2\cdot10^{-8}}-3=-4,4\cdot10^{-3}.$$

Для непрерывной случайной величины, распределенной по нормальному закону, теоретические значения коэффициентов эксцесса и асимметрии равны $E=0$, $A=0$. В нашем случае конечной выборки о малости этих коэффициентов судят по сравнению их со среднеквадратическими отклонениями σ_E и σ_A. При $n=100$ из (г) получаем $\sigma_A=\sqrt{6\cdot99/(101\cdot103)}=0,24$; $\sigma_E=\sqrt{24\cdot100\cdot98\cdot97/(99^2\cdot103\cdot105)}=0,46$.

Так как полученные оценки коэффициентов асимметрии и эксцесса по абсолютной величине не превосходят своих среднеквадратических отклонений, то нет оснований сомневаться в том, что закон распределения результатов измерений является нормальным.

В противном случае для проверки гипотезы о законе распределения необходимо было бы использовать более точные методы, в частности, основанные на критерии Пирсона.

92. В результате измерений получен ряд значений напряжения $U=10,3$; 11,1; 10,4; 11,5; 10,9; 10,1; 10,1; 10,8; 11,2; 10,7; 11,0 В. По данной выборке построить вариационный ряд. Определить среднее значение и медиану ряда. Оценить истинное значение напряжения.

93. По результатам 25 наблюдений был определен доверительный интервал отклонений измеряемого давления от наиболее вероятного его значения с доверительной вероятностью $P=0,7$; $I_{0,7}=23,84$—24,37 МПа. Определите доверительный интервал с доверительной вероятностью 0,95, полагая, что отклонения давления распределены по закону Стьюдента.

94. Проведено 13 измерений величины тока $I=3,18$; 3,24; 3,17; 3,16; 3,18; 3,30; 3,18; 3,19; 3,25; 3,17; 3,15; 3,16; 3,22 мА. Определить, содержат ли полученные результаты грубые погрешности? Определить точечную оценку истинного значения тока.

95. По данным 15 независимых равноточных измерений напряжения получены оценки среднего значения напряжения $U=42,6$ мВ и среднеквадратичной погрешности $\sigma=3$ мВ. Оценить истинное значение измеряемого напряжения с доверительной вероятностью $P=0,95$; $P=0,99$. Закон распределения погрешности — нормальный.

96. По 25 результатам независимых равноточных измерений частоты получено среднее значение $f=155,45$ кГц. Известно, что среднеквадратическая погрешность измерения $\sigma=0,55$ кГц. Оценить истинное значение измеряемой частоты с доверительной вероятностью $P=0,9$; $P=0,95$; $P=0,99$. Закон распределения погрешностей — нормальный.

97. Среднеквадратическая погрешность измерения сопротивления резистора $\sigma=0,5$ Ом. Определить необходимое число измерений, чтобы с доверительной вероятностью $P=0,95$ ($P=0,99$) граничное значение доверительного интервала было равно $d=2$ Ом ($d=1$ Ом).

98. С помощью вольтметра, имеющего погрешность $\sigma=0,02$ В, по результатам 9 наблюдений получена оценка напряжения $U=(8,13\pm0,01)$ В. Определить доверительную вероятность полученного результата. Как изменится результат измерения, если принять $P=0,99$?

99. С помощью первого вольтметра, имеющего погрешность $\sigma_1=0,02$ В, по результатам 10 наблюдений получена оценка измеряемого напряжения с границами доверительного интервала $d=0,01$ В. Сколько потребуется измерений, чтобы такая же точность с такой же P была получена другим вольтметром с $\sigma_2=0,05$ В?

100. Проведено 12 измерений значений частоты $f=718,43$; 719,07; 718,83; 719,61; 717,51; 719,52; 719,43; 720,25; 719,25; 719,80; 721,16; 719,18 кГц. Найти точечную оценку измеренного значения частоты. Рассчитать доверительный интервал, в котором лежит истинное значение частоты F, при доверительной вероятности $P=0,95$; $P=0,99$. Закон распределения погрешностей измерения — нормальный.

101. С помощью измерительной линейки проведено многократное измерение положения электрического зонда в измерительной линии: $l=25,3$; 25,5; 25,9;

25,9; 25,2; 25,6; 25,8; 25,4; 25,4; 25,4; 25,3; 25,8; 25,6; 25,2; 25,9; 25,7; 25,4 мм. Получить точечную оценку истинного значения величины L.

102. Для данных задач 100 и 101 оценить значения коэффициентов асимметрии и эксцесса. Сравнить полученные результаты.

103. Проведено 7 измерений емкости конденсатора: $C=125{,}9$; 126,6; 125,9; 125,6; 125,9; 126,2; 126,1. Погрешности измерений распределены по нормальному закону. Определить точечную оценку измерений величины C (пФ).

104. Результаты измерений, приведенные в задаче 103, содержат среднеквадратическую погрешность $\sigma=0{,}3$ пФ. Определить интервальную оценку измеряемой величины C при доверительной вероятности: а) $P=0{,}9$; б) $P=0{,}95$; в) $P=0{,}99$. Как изменится доверительный интервал, если $\sigma=0{,}2$ пФ; $\sigma=0{,}6$ пФ?

105. Результаты измерений, приведенные в задаче 103, содержат среднеквадратическую погрешность $\sigma=0{,}3$ пФ. Определить надежность результата измерения C, попадающего в доверительный интервал: [125,81, 126,31]; [125,56, 126,56].

106. Для данных задачи 103 определить интервальную оценку измеряемой величины емкости конденсатора при доверительной вероятности: а) $P=0{,}9$; б) $P=0{,}95$; в) $P=0{,}99$.

107. Проведено 14 наблюдений значений частот f_1 и f_2 на границе полосы пропускания резонансного контура (табл. 8.8).

Таблица 8.8

№ наблюдения	Значения частот, кГц		№ наблюдения	Значения частот, кГц	
	f_2	f_1		f_2	f_1
1	179,2	174,5	8	178,4	173,6
2	178,7	173,9	9	180,6	172,7
3	180,3	175,5	10	179,3	174,8
4	179,1	174,3	11	178,9	174,1
5	178,8	174,0	12	177,7	172,9
6	177,4	173,1	13	179,6	175,5
7	179,3	174,3	14	178,9	174,4

Известно, что закон распределения случайных погрешностей — нормальный. Оценить коэффициент корреляции $r_{f_1f_2}$ величин f_1 и f_2.

108. Для данных задачи 107 определить границы доверительных погрешностей d_1 и d_2 измеренных величин f_1 и f_2 соответственно при доверительной вероятности, равной: а) $P=0{,}95$; б) $P=0{,}99$.

109. По данным задачи 107 проведено измерение полосы пропускания резонансного контура $\Pi=f_2-f_1$. Получить точечную оценку результата измерения полосы пропускания: а) с учетом коэффициента корреляции $r_{f_1f_2}$; б) без учета коэффициента корреляции.

110. Проведено косвенное измерение полосы пропускания резонансного контура $f_2-f_1=\Pi$ (данные задачи 107). Рассчитать доверительную погрешность измерения полосы пропускания Π для: а) $P=0{,}95$; б) $P=0{,}99$. Оценку погрешности провести с учетом и без учета коэффициента корреляции $r_{f_1f_2}$.

111. Проведено косвенное измерение добротности резонансного контура $Q=0{,}5(f_2+f_1)/(f_2-f_1)$ (данные задачи 107). Рассчитать величину измеренной добротности и доверительную погрешность ее измерения для: а) $P=0{,}95$; б) $P=0{,}99$. Оценку погрешности провести с учетом и без учета коэффициента корреляции.

112. Определить примерное число интервалов группирования данных r при построении гистограммы, если объем выборки равен: $n=50$, 100, 200, 500, 1000. Построить зависимость $r(n)$.

113. Произведено многократное измерение напряжения (табл. 8.9).

Таблица 8.9

№ п/п	Значение напряжения U, мВ	№ п/п	Значение напряжения U, мВ	№ п/п	Значение напряжения U, мВ	№ п/п	Значение напряжения U, мВ
1	599,52	18	601,28	35	599,44	52	598,14
2	599,36	19	597,48	36	600,4	53	595,80
3	594,24	20	598,12	37	596,36	54	597,88
4	596,56	21	586,40	38	598,00	55	599,80
5	593,60	22	600,84	39	594,88	56	598,68
6	596,12	23	596,20	40	598,52	57	593,24
7	592,96	24	606,80	41	599,08	58	602,24
8	602,76	25	595,6	42	598,48	59	591,96
9	596,64	26	598,28	43	599,20	60	595,16
10	597,86	27	597,16	44	603,80	61	604,04
11	598,06	28	597,94	45	590,60	62	598,96
12	597,32	29	597,72	46	600,96	63	599,64
13	599,88	30	593,76	47	609,60	64	598,84
14	603,04	31	605,40	48	589,20	65	601,12
15	596,80	32	597,52	49	595,44	66	600,56
16	595,04	33	594,72	50	596,92	67	600,20
17	598,6	34	597,04	51	594,40	68	601,76

По полученным данным построить гистограмму распределения напряжения. Качественно оценить полученный закон распределения.

114. Для данных задачи 113 оценить истинное значение измеренного напряжения. Привести точечную и интервальную (для $P=0{,}95$) оценки истинного значения.

115. Для данных задачи 113 рассчитать оценки коэффициентов асимметрии и эксцесса. На основании полученных оценок высказать соображения о характере полученного распределения.

116. Используя результаты задач 113 и 114, с помощью критерия Пирсона обосновать гипотезу о: а) нормальном законе распределения значений напряжения; б) равномерном законе распределения значений напряжения.

117. Были произведены многократные измерения ТЭДС с целью определения закона распределения погрешности. Все результаты были разбиты на 10 интервалов, границы которых и число приходящихся на каждый из них значений измеряемой величины приведены в табл. 8.10.

Таблица 8.10

i	e_i, мВ	m_i	i	e_i, мВ	m_i
1	9,69—9,85	20	6	10—10,01	18
2	9,85—9,93	22	7	10,01—10,03	21
3	9,93—9,97	18	8	10,03—10,07	19
4	9,97—9,99	20	9	10,07—10,15	17
5	9,99—10	22	10	10,15—10,31	23

Постройте гистограмму статистического ряда и определите, соответствует ли она закону равномерной плотности.

118. Было произведено 844 измерения значения силы тока на выходе одного из нормирующих преобразователей. Результаты были разбиты на 18 интервалов шириной $\Delta=0{,}003$ мА и приведены в табл. 8.11. Там же указаны число измерений m_i в каждом интервале и границы интервалов в миллиамперах.

Постройте гистограмму приведенного статистического ряда и произведите его выравнивание нормальным законом распределения.

Таблица 8.11

i	I_i, мА	m_i	i	I_i, мА	m_i	i	I_i, мА	m_i
1	4,983—4,986	5	7	5,001—5,004	77	13	5,019—5,022	55
2	4,986—4,989	8	8	5,004—5,007	92	14	5,022—5,025	42
3	4,989—4,992	16	9	5,007—5,010	98	15	5,025—5,028	25
4	4,992—4,995	27	10	5,010—5,013	100	16	5,028—5,031	15
5	4,995—4,998	40	11	5,013—5,016	90	17	5,031—5,034	10
6	4,998—5,001	59	12	5,016—5,019	80	18	5,034—5,037	5

119. С целью исследования закона распределения ошибки измерения концентрации кислорода газоанализатором было выполнено 315 измерений. Совокупность погрешностей представлена в виде статистического ряда (табл. 8.12).

Таблица 8.12

ΔC, %	$\bar{x}_i$	m_i	$\hat{p}_i$	ΔC, %	$\bar{x}_i$	m_i	$\hat{p}_i$
—0,50÷ —0,45	—0,475	12	0,0381	0—0,05	0,025	18	0,05714
—0,45÷ —0,40	—0,425	19	0,06032	0,05—0,10	0,075	19	0,06032
—0,40÷ —0,35	—0,375	17	0,05397	0,10—0,15	0,125	15	0,04762
—0,35÷ —0,30	—0,325	15	0,04762	0,15—0,20	0,175	16	0,05079
—0,30÷ —0,25	—0,275	16	0,05079	0,20—0,25	0,225	13	0,04127
—0,25÷ —0,20	—0,225	14	0,04444	0,25—0,30	0,275	17	0,05397
—0,20÷ —0,15	—0,175	18	0,05714	0,30—0,35	0,325	16	0,05079
—0,15÷ —0,10	—0,125	12	0,0381	0,35—0,40	0,375	16	0,05079
—0,10÷ —0,05	—0,075	16	0,05079	0,40—0,45	0,425	14	0,04444
—0,05÷ 0	—0,025	13	0,04127	0,45—0,50	0,475	19	0,06032

Произведите выравнивание статистического ряда с помощью закона равномерной плотности и проверьте согласованность теоретического и статистического распределений с помощью критерия χ^2.

Доверительную вероятность того, что значение χ^2, полученное по опытным данным, будет меньше соответствующего значения $\chi^2_{\text{табл}}$ теоретического распределения, принять равной $P=0,05$.

120. Проведен ряд измерений температуры кипения воды в барометрическом термостате, при этом были получены результаты (табл. 8.13).

Таблица 8.13

i	t_i, °C	i	t_i, °C	i	t_i, °C	i	t_i, °C
1	98,6	4	97,8	7	97,9	10	98,2
2	97,8	5	98,4	8	98,0	11	98,3
3	98,1	6	98,3	9	98,1	12	98,3

Измерение барометрического давления не проводилось, предполагалось, что оно составляет 760 мм рт. ст., а температура кипения при этом равна 100 °C. По полученным результатам дайте заключение, какая погрешность — систематическая или случайная — является определяющей и как ее уменьшить.

121. Определите границы доверительного интервала погрешности измерения температуры с вероятностью 0,95, если при большом числе измерений было получено $\bar{x}=1072$ °C, а дисперсия $D(x)=64$ (°C)^2. Предполагается нормальный закон распределения погрешности.

122. В результате большого числа измерений ТЭДС был определен доверительный интервал ($16,73 \leqslant x < 17,27$) мВ, с доверительной вероятностью 0,997. Определите среднюю квадратическую погрешность измерения ТЭДС в предположении нормального закона распределения погрешности.

123. Определите 99%-ный доверительный интервал для температуры термоэлектрического термометра типа К (*никель-хром — никель-алюминиевый*, хромель-алюмелевый), если при измерении были получены следующие результаты: 31,56; 31,82; 31,73; 31,68; 31,49; 31,73; 31,74; 31,72 мВ. Предполагается, что ТЭДС — случайная величина, распределенная по закону Стьюдента.

124. Яркостная температура слитка металла, измеренная квазимонохроматическим пирометром в пяти различных точках, оказалась следующей: 975, 1005, 945, 950, 987 °C. Полагаем, что действительная температура во всех точках одинакова. Разница в яркостных температурах вызвана систематической погрешностью за счет окислов на поверхности. Оцените наиболее вероятное значение температуры слитка, а также доверительный интервал систематической погрешности, соответствующий доверительной вероятности $P=0,9$, предполагая, что погрешности распределены по закону Стьюдента.

125. Для задачи 124 определите доверительный интервал для $P=0,9$, если было произведено 10 измерений температуры слитка:

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
t, °C . .	975	1005	945	950	987	967	953	980	980	990

126. При испытании потенциометра КСП-4 градуировки ХК со шкалой 0—600 °C, класса точности 0,25 в точке 500 °C были получены следующие результаты (табл. 8.14).

Таблица 8.14

i	x_{m_i}, мВ	x_{σ_i}, мВ	i	x_{m_i}, мВ	x_{σ_i}, мВ	i	x_{m_i}, мВ	x_{σ_i}, мВ
1	40,16	40,12	5	40,24	40,18	9	40,18	40,07
2	40,20	40,10	6	40,15	40,08	10	40,18	40,09
3	40,17	40,14	7	40,20	40,12	11	40,15	40,20
4	40,26	40,14	8	40,22	40,10	12	40,17	40,10

Примечание. x_{m_i} — значение ТЭДС при подходе к отметке со стороны меньших значений; x_{σ_i} — значение ТЭДС при подходе к отметке со стороны больших значений.

Определите систематическую составляющую Δ_c погрешности потенциометра в точке 500 °C, оцените среднее квадратическое отклонение случайной составляющей погрешности σ в той же точке шкалы потенциометра, а также наибольшее значение суммарной погрешности и вариацию.

Значения функции $\Phi(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^t \cdot e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt$

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,0000	0,0040	0,0080	0,0120	0,0160	0,0199	0,0239	0,0279	0,0319	0,0359
0,1	0398	0438	0478	0517	0557	0596	0636	0675	0714	0753
0,2	0793	0832	0871	0910	0948	0987	1026	1064	1103	1141
0,3	1179	1217	1255	1293	1331	1368	1406	1443	1480	1517
0,4	1554	1591	1628	1664	1700	1736	1772	1808	1844	1879
0,5	1915	1950	1985	2019	2054	2088	2123	2157	2190	2224
0,6	2257	2291	2324	2357	2389	2422	2454	2486	2517	2549
0,7	2580	2611	2642	2673	2703	2734	2764	2794	2823	2852
0,8	2881	2910	2939	2967	2995	3023	3051	3078	3106	3133
0,9	3159	3186	3212	3238	3264	3289	3315	3340	3365	3389
1,0	3413	3438	3461	3485	3508	3531	3554	3577	3599	3621
1,1	3643	3665	3686	3708	3729	3749	3770	3790	3810	3830
1,2	3849	3869	3888	3907	3925	3944	3962	3980	3997	4015
1,3	4032	4049	4066	4082	4099	4115	4131	4147	4162	4177
1,4	4192	4207	4222	4236	4251	4265	4279	4292	4306	4319
1,5	4332	4345	4357	4370	4382	4394	4406	4418	4429	4441
1,6	4452	4463	4474	4484	4495	4505	4515	4525	4535	4545
1,7	4554	4564	4573	4582	4591	4599	4608	4616	4625	4633
1,8	4641	4649	4656	4664	4671	4678	4686	4693	4699	4706
1,9	4713	4719	4726	4732	4738	4744	4750	4756	4761	4767
2,0	4772	4778	4783	4788	4793	4798	4803	4808	4813	4817
2,1	4821	4826	4830	4834	4838	4842	4846	4850	4854	4857
2,2	4861	4864	4868	4871	4874	4878	4881	4884	4887	4890
2,3	4893	4896	4898	4901	4904	4906	4909	4911	4913	4916
2,4	4918	4920	4922	4925	4927	4929	4931	4932	4934	4936
2,5	4938	4940	4941	4943	4945	4946	4948	4949	4951	4952

Продолжение

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2,6	4953	4955	4956	4957	4959	4960	4961	4962	4963	4964
2,7	4965	4966	4967	4968	4969	4970	4971	4972	4973	4974
2,8	4974	4975	4976	4977	4977	4978	4979	4979	4980	4981
2,9	4981	4982	4982	4983	4984	4984	4985	4985	4986	4986
3,0	4986									
3,5	4998									
4,0	4999									

Примечание. $\Phi(x)=0{,}5\pm\Phi(t)$.

Ординаты нормального распределения

Ординаты стандартного нормального распределения Y для любого нормированного отклонения от среднего значения определяются по формуле $Y = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{t^2}{2}}$, где $t_i = \frac{x_i - \bar{x}}{\sigma}$. Чтобы получить результат в единицах конкретной задачи, надо умножить эти ординаты на $\frac{n \cdot h}{\sigma}$, где через n обозначено число случаев, через h — ширина интервала и через σ — среднее квадратическое отклонение.

t	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,39894	0,39892	0,39886	0,39876	0,39862	0,39844	0,39822	0,39797	0,39767	0,39733
0,1	0,39695	0,39654	0,39608	0,39559	0,39505	0,39448	0,39387	0,39322	0,39253	0,39181
0,2	0,39104	0,39024	0,38940	0,38853	0,38762	0,38667	0,38568	0,38466	0,38361	0,38251
0,3	0,38139	0,38023	0,37903	0,37780	0,37654	0,37524	0,37391	0,37255	0,37115	0,36973
0,4	0,36827	0,36678	0,36526	0,36371	0,36213	0,36053	0,35889	0,35723	0,35553	0,35381
0,5	0,35207	0,35029	0,34849	0,34667	0,34482	0,34294	0,34105	0,33912	0,33718	0,33521
0,6	0,33322	0,33121	0,32918	0,32713	0,32506	0,32297	0,32086	0,31874	0,31659	0,31443
0,7	0,31225	0,31006	0,30785	0,30563	0,30339	0,30114	0,29887	0,29658	0,29430	0,29200
0,8	0,28969	0,28737	0,28504	0,28269	0,28034	0,27798	0,27562	0,27324	0,27086	0,26848
0,9	0,26609	0,26369	0,26129	0,25888	0,25647	0,25406	0,25164	0,24923	0,24681	0,24439
1,0	0,24197	0,23955	0,23713	0,23471	0,23230	0,22988	0,22747	0,22506	0,22265	0,22025
1,1	0,21785	0,21546	0,21307	0,21069	0,20831	0,20594	0,20357	0,20121	0,19886	0,19652
1,2	0,19419	0,19186	0,18954	0,18724	0,18494	0,18265	0,18037	0,17810	0,17585	0,17360
1,3	0,17137	0,16915	0,16694	0,16474	0,16256	0,16038	0,15822	0,15608	0,15395	0,15183
1,4	0,14973	0,14764	0,14556	0,14350	0,14146	0,13943	0,13742	0,13542	0,13344	0,13147
1,5	0,12952	0,12758	0,12566	0,12376	0,12188	0,12001	0,11816	0,11632	0,11450	0,11270
1,6	0,11092	0,10915	0,10741	0,10567	0,10396	0,10226	0,10059	0,09893	0,09728	0,09566
1,7	0,09405	0,09246	0,09089	0,08933	0,08780	0,08628	0,08478	0,08329	0,08183	0,08038
1,8	0,07895	0,07754	0,07614	0,07477	0,07341	0,07206	0,07074	0,06943	0,06814	0,06687
1,9	0,06562	0,06438	0,06316	0,06195	0,06077	0,05959	0,05844	0,05730	0,05618	0,05508

Продолжение

t	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
2,0	0,05399	0,05292	0,05186	0,05082	0,04980	0,04879	0,04780	0,04682	0,04586	0,04491
2,1	0,04398	0,04307	0,04217	0,04128	0,04041	0,03955	0,03871	0,03788	0,03706	0,03626
2,2	0,03547	0,03470	0,03394	0,03319	0,03246	0,03174	0,03103	0,03034	0,02965	0,02898
2,3	0,02833	0,02768	0,02705	0,02643	0,02582	0,02522	0,02463	0,02406	0,02349	0,02294
2,4	0,02239	0,02186	0,02134	0,02083	0,02033	0,01984	0,01936	0,01888	0,01842	0,01797
2,5	0,01753	0,01709	0,01667	0,01625	0,01585	0,01545	0,01506	0,01468	0,01431	0,01394
2,6	0,01358	0,01323	0,01289	0,01256	0,01223	0,01191	0,01160	0,01130	0,01100	0,01071
2,7	0,01042	0,01014	0,00987	0,00961	0,00935	0,00909	0,00885	0,00861	0,00837	0,00814
2,8	0,00792	0,00770	0,00748	0,00727	0,00707	0,00687	0,00668	0,00649	0,00631	0,00613
2,9	0,00595	0,00578	0,00562	0.00545	0,00530	0,00514	0,00499	0,00485	0,00470	0,00457
3,0	0,00443									
3,5	0,0008727									
4,0	0,0001338									
4,5	0,0000160									
5,0	0,000001487									

Функция нормального распределения $F(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{t}\cdot e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt,$

Доля от всей площади под кривой, лежащая в пределах от $-\infty$ до заданного t, где

$$t=\frac{x_i-\overline{x}}{\sigma};F(t)=\frac{1}{2}+\Phi(t)$$

t	0,09	0,08	0,07	0,06	0,05	0,04	0,03	0,02	0,01	0,00
—3,5	0,00017	0,00017	0,00018	0,00019	0,00019	0,00020	0,00021	0,00022	0,00022	0,00023
—3,4	0,00024	0,00025	0,00026	0,00027	0,00028	0,00029	0,00030	0,00031	0,00033	0,00034
—3,3	0,00035	0,00036	0,00038	0,00039	0,00040	0,00042	0,00043	0,00045	0,00047	0,00048
—3,2	0,00050	0,00052	0,00054	0,00056	0,00058	0,00060	0,00062	0,00064	0,00066	0,00069
—3,1	0,00071	0,00074	0,00076	0,00079	0,00082	0,00085	0,00087	0,00090	0,00094	0,00097
—3,0	0,00100	0,00104	0,00107	0,00111	0,00114	0,00118	0,00122	0,00126	0,00131	0,00135
—2,9	0,0014	0,0014	0,0015	0,0015	0,0016	0,0016	0,0017	0,0017	0,0018	0,0019
—2,8	0,0019	0,0020	0,0021	0,0021	0,0022	0,0023	0,0023	0,0024	0,0025	0,0026
—2,7	0,0026	0,0027	0,0028	0,0029	0,0030	0,0031	0,0032	0,0033	0,0034	0,0035
—2,6	0,0036	0,0037	0,0038	0,0039	0,0040	0,0041	0,0043	0,0044	0,0045	0,0047
—2,5	0,0048	0,0049	0,0051	0,0052	0,0054	0,0055	0,0057	0,0059	0,0060	0,0062
—2,4	0,0064	0,0066	0,0068	0,0069	0,0071	0,0073	0,0075	0,0078	0,0080	0,0082
—2,3	0,0084	0,0087	0,0089	0,0091	0,0094	0,0096	0,0099	0,0102	0,0104	0,0107
—2,2	0,0110	0,0113	0,0116	0,0119	0,0122	0,0125	0,0129	0,0132	0,0136	0,0139
—2,1	0,0143	0,0146	0,0150	0,0154	0,0158	0,0162	0,0166	0,0170	0,0174	0,0179
—2,0	0,0183	0,0188	0,0192	0,0197	0,0202	0,0207	0,0212	0,0217	0,0222	0,0228
—1,9	0,0233	0,0239	0,0244	0,0250	0,0256	0,0262	0,0268	0,0274	0,0281	0,0287
—1,8	0,0294	0,0301	0,0307	0,0314	0,0322	0,0329	0,0336	0,0344	0,0351	0,0359
—1,7	0,0367	0,0375	0,0384	0,0392	0,0401	0,0409	0,0418	0,0427	0,0436	0,0446
—1,6	0,0455	0,0465	0,0475	0,0485	0,0495	0,0505	0,0516	0,0526	0,0537	0,0548

Продолжение

t	0,09	0,08	0,07	0,06	0,05	0,04	0,03	0,02	0,01	0,00
—1,5	0,0559	0,0571	0,0582	0,0594	0,0606	0,0618	0,0630	0,0643	0,0655	0,0668
—1,4	0,0681	0,0694	0,0708	0,0721	0,0735	0,0749	0,0764	0,0778	0,0793	0,0808
—1,3	0,0823	0,0838	0,0853	0,0869	0,0885	0,0901	0,0918	0,0934	0,0951	0,0968
—1,2	0,0985	0,1003	0,1020	0,1038	0,1057	0,1075	0,1093	0,1112	0,1131	0,1151
—1,1	0,1170	0,1190	0,1210	0,1230	0,1251	0,1271	0,1292	0,1314	0,1335	0,1357
—1,0	0,1379	0,1401	0,1423	0,1446	0,1469	0,1492	0,1515	0,1539	0,1562	0,1587
—0,9	0,1611	0,1635	0,1660	0,1685	0,1711	0,1736	0,1762	0,1788	0,1814	0,1841
—0,8	0,1867	0,1894	0,1922	0,1949	0,1977	0,2005	0,2033	0,2061	0,2090	0,2119
—0,7	0,2148	0,2177	0,2207	0,2236	0,2266	0,2297	0,2327	0,2358	0,2389	0,2420
—0,6	0,2451	0,2483	0,2514	0,2546	0,2578	0,2611	0,2643	0,2676	0,2709	0,2743
—0,5	0,2776	0,2810	0,2843	0,2877	0,2912	0,2946	0,2981	0,3015	0,3050	0,3085
—0,4	0,3121	0,3156	0,3192	0,3228	0,3264	0,3300	0,3336	0,3372	0,3409	0,3446
—0,3	0,3483	0,3520	0,3557	0,3594	0,3632	0,3669	0,3707	0,3745	0,3783	0,3821
—0,2	0,3859	0,3897	0,3936	0,3974	0,4013	0,4052	0,4090	0,4129	0,4168	0,4207
—0,1	0,4247	0,4286	0,4325	0,4364	0,4404	0,4443	0,4483	0,4522	0,4562	0,4602
—0,0	0,4641	0,4681	0,4721	0,4761	0,4801	0,4840	0,4880	0,4920	0,4960	0,5000

Продолжение

t	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
+0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
+0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
+0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
+0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
+0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
+0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
+0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
+0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852

Продолжение

t	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
+0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8079	0,8106	0,8133
+0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
+1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
+1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
+1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
+1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
+1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
+1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
+1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
+1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
+1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
+1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
+2,0	0,9773	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
+2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
+2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
+2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
+2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
+2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
+2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
+2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
+2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
+2,9	0,9981	0,9982	0,9983	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
+3,0	0,99865	0,99869	0,99874	0,99878	0,99882	0,99886	0,99889	0,99893	0,99896	0,99900
+3,1	0,99903	0,99906	0,99910	0,99913	0,99915	0,99918	0,99921	0,99924	0,99926	0,99929
+3,2	0,99931	0,99934	0,99936	0,99938	0,99940	0,99942	0,99944	0,99946	0,99948	0,99950
+3,3	0,99952	0,99953	0,99955	0,99957	0,99958	0,99960	0,99961	0,99962	0,99964	0,99965
+3,4	0,99966	0,99967	0,99969	0,99970	0,99971	0,99972	0,99973	0,99974	0,99975	0,99976
+3,5	0,99977	0,99978	0,99978	0,99979	0,99980	0,99981	0,99981	0,99982	0,99983	0,99983

Приложение 4

Значения χ^2_α, удовлетворяющие условию $p(\chi^2 > \chi^2_\alpha) = \alpha$

Число степеней свободы k	p											
	0,995	0,990	0,975	0,950	0,900	0,800	0,200	0,100	0,050	0,025	0,010	0,005
1	$0{,}39\cdot10^{-4}$	$0{,}16\cdot10^{-3}$	$0{,}98\cdot10^{-3}$	$0{,}39\cdot10^{-2}$	0,016	0,064	1,64	2,71	3,84	5,02	6,63	7,88
2	0,010	0,020	0,051	0,103	0,211	0,446	3,22	4,61	5,98	7,38	9,21	10,60
3	0,072	0,115	0,216	0,352	0,584	1,000	4,64	6,25	7,81	9,35	11,30	12,80
4	0,207	0,297	0,484	0,711	1,060	1,650	5,99	7,78	9,49	11,10	13,30	14,90
5	0,412	0,554	0,831	1,150	1,610	2,340	7,29	9,24	11,10	12,80	15,10	16,70
6	0,676	0,872	1,240	1,640	2,200	3,070	8,56	10,60	12,60	14,40	16,80	18,50
7	0,989	1,240	1,690	2,170	2,830	3,820	9,80	12,00	14,10	16,00	18,50	20,30
8	1,340	1,650	2,180	2,730	3,490	4,590	11,00	13,40	15,50	17,50	20,10	22,00
9	1,730	2,090	2,700	3,330	4,170	5,380	12,20	14,70	16,90	19,00	21,70	23,60
10	2,160	2,560	3,250	3,940	4,870	6,180	13,40	16,00	18,30	20,50	23,20	25,20
11	2,600	3,050	3,820	4,570	5,580	6,990	14,60	17,30	19,70	21,90	24,70	26,80
12	3,070	3,570	4,400	5,230	6,300	7,810	15,80	18,50	21,00	23,30	26,20	28,30
13	3,570	4,110	5,010	5,890	7,040	8,630	17,00	19,80	22,40	24,70	27,70	29,80
14	4,070	4,660	5,630	6,570	7,790	9,470	18,20	21,10	23,70	26,10	29,10	31,30
15	4,600	5,230	6,260	7,260	8,560	10,300	19,30	22,30	25,00	27,50	30,60	32,80
16	5,140	5,810	6,910	7,960	9,310	11,200	20,50	23,50	26,30	28,80	32,00	34,30
18	6,260	7,010	8,230	9,390	10,900	12,900	22,80	26,00	28,90	31,50	34,80	37,20
20	7,43	8,26	9,59	10,9	12,4	14,6	25,0	28,4	31,4	34,2	37,6	40,0
	α											
22	8,64	9,54	11,00	12,3	14,0	16,3	27,3	30,8	33,9	36,8	40,3	42,8
24	9,89	10,90	12,40	13,8	15,7	18,1	29,6	33,2	36,4	39,4	43,0	45,6
26	11,20	12,20	13,80	15,4	17,3	19,8	31,8	35,6	38,9	41,9	45,6	48,3
28	12,50	13,60	15,30	16,9	18,9	21,6	34,0	37,9	41,3	44,5	48,3	51,0
30	13,80	15,00	16,80	18,5	20,6	23,4	36,3	40,3	43,8	47,0	50,9	53,7
35	17,20	17,50	20,60	22,5	24,8	27,8	41,8	46,1	49,9	53,2	57,3	60,3

Продолжение

Число степеней свободы *k*	α											
	0,995	0,990	0,975	0,950	0,900	0,800	0,200	0,100	0,050	0,025	0,010	0,005
40	20,70	22,20	24,40	26,5	29,1	32,2	47,3	51,8	55,8	59,3	63,7	66,8
45	24,30	25,90	28,40	30,6	33,4	36,9	52,7	57,5	61,7	65,4	70,0	73,2
50	28,00	29,70	32,40	34,8	37,7	41,8	58,2	63,2	67,5	71,4	76,2	79,5
55	31,70	33,60	36,40	39,0	42,1	46,0	63,6	68,8	73,3	77,4	82,3	85,7
60	35,50	37,50	40,50	43,2	46,5	50,6	69,0	74,4	79,1	83,3	88,4	92,0
65	39,40	41,40	44,60	47,4	50,9	55,3	74,4	80,0	84,8	89,2	94,4	98,1
70	43,30	45,40	48,80	51,7	55,3	59,9	79,7	85,5	90,5	95,0	100,4	104,2
75	47,20	49,50	52,90	56,1	59,8	64,5	85,1	91,1	96,2	100,8	106,4	110,3
80	51,20	53,50	57,20	60,4	64,3	69,2	90,4	96,6	101,9	106,6	112,3	116,3
85	55,20	57,60	61,40	64,7	68,8	73,9	95,7	102,1	107,5	112,4	118,2	122,3
90	59,90	61,80	65,60	69,1	73,3	78,6	101,1	107,6	112,1	118,1	124,1	128,3
95	63,20	65,90	69,90	73,5	77,8	83,2	106,4	113,0	118,8	123,9	130,0	134,2
100	67,30	70,10	74,20	77,9	82,4	87,9	111,7	118,5	124,3	129,6	135,8	140,2

Приложение 5

Коэффициент распределения Стьюдента t_p

n	При доверительной вероятности p					n	При доверительной вероятности p				
	0,90	0,95	0,98	0,99	0,999		0,90	0,95	0,98	0,99	0,999
2	6,31	12,71	31,82	63,68	636,62	12	1,80	2,20	2,72	3,11	4,44
3	2,92	4,30	6,97	9,93	31,60	13	1,78	2,18	2,68	3,06	4,32
4	2,35	3,18	4,54	5,84	12,92	14	1,77	2,16	2,65	3,01	4,22
5	2,13	2,78	3,75	4,60	8,61	15	1,76	2,15	2,62	2,98	4,14
6	2,02	2,57	3,37	4,06	6,87	16	1,75	2,13	2,60	2,95	4,07
7	1,94	2,45	3,14	3,71	5,96	17	1,75	2,12	2,58	2,92	4,02
8	1,90	2,37	3,00	3,50	5,41	18	1,74	2,11	2,57	2,90	3,97
9	1,86	2,31	2,90	3,36	5,04	19	1,73	2,10	2,55	2,88	3,92
10	1,83	2,26	2,82	3,25	4,78	20	1,73	2,09	2,54	2,86	3,88
11	1,81	2,23	2,76	3,17	4,59	∞	1,65	1,96	2,33	2,58	3,29

Приложение 6

Значения α-процентных точек распределения

$$t_{\text{г}} = \frac{\max|x_i - \overline{x}|}{\sigma}.$$

Число наблюдений n	Уровень значимости α, %				
	0,1	0,5	1	5	10
3	1,414	1,414	1,414	1,414	1,412
4	1,732	1,730	1,728	1,710	1,689
5	1,994	1,982	1,972	1,917	1,869
6	2,212	2,183	2,161	2,067	1,996
7	2,395	2,344	2,310	2,182	2,093
8	2,547	2,476	2,431	2,273	2,172
9	2,677	2,586	2,532	2,349	2,238
10	2,788	2,680	2,616	2,414	2,294
11	2,884	2,760	2,689	2,470	2,343
12	2,969	2,830	2,753	2,519	2,387
13	3,044	2,892	2,809	2,563	2,426
14	3,111	2,947	2,859	2,602	2,461
15	3,171	2,997	2,905	2,638	2,494
16	3,225	3,042	2,946	2,670	2,523
17	3,274	3,083	2,983	2,701	2,551
18	3,320	3,120	3,017	2,728	2,577
19	3,361	3,155	3,049	2,754	2,601
20	3,400	3,187	3,079	2,779	2,623
21	3,436	3,217	3,106	2,801	2,644
22	3,469	3,245	3,132	2,823	2,664
23	3,500	3,271	3,156	2,843	2,683
24	3,529	3,295	3,179	2,862	2,701
25	3,556	3,318	3,200	2,880	2,718
26	3,582	3,340	3,220	2,897	2,734
27	3,606	3,360	3,239	2,913	2,749
28	3,629	3,380	3,258	2,929	2,764
29	3,651	3,399	3,275	2,944	2,778
30	3,672	3,416	3,291	2,958	2,792

1. Артемьев Б. Г., Голубев С. М. Справочное пособие для работников метрологических служб. — М.: Изд-во стандартов, 1990.
2. Березин И. С., Жидков Н. Г. Методы вычислений. — М.: Физматгиз, 1962.
3. Бурдун Г. Д., Марков Б. Н. Основы метрологии. — М.: Изд-во стандартов, 1985.
4. Бурдун Г. Д. Справочник по международной системе единиц. 3-е доп. изд. — М.: Изд-во стандартов, 1980.
5. Бурдун Г. Д., Базакца В. А. Единицы физических величин. — Харьков: Вища школа, 1984.
6. Бурумкулов Ф. Х., Мировская Е. А. Основы теории вероятностей и математической статистики. — М.: Изд-во стандартов, 1981.
7. Гнеденко Б. В. Курс теории вероятностей. — М.: Наука, 1988.
8. Горяинов В. Т., Журавлев А. Г., Тихонов В. И. Статистическая радиотехника. — М.: Советское радио, 1979.
9. Гнеденко Б. В., Хинчин А. Я. Элементарное введение в теорию вероятностей. — М.: Наука, 1982.
10. Гутер Р. С., Овчинский Б. В. Элементы численного анализа и математической обработки результатов опыта. — М.: Наука. 1970.
11. Ершов В. С. Внедрение Международной системы единиц. — М.: Изд-во стандартов, 1986.
12. Ершов В. С., Сафаров Г. П. Внедрение СТ СЭВ 1052—78 в народное хозяйство // Измерительная техника. — 1981. — № 9.
13. Ершов В. С., Сафаров Г. П. Методические вопросы внедрения СИ в народное хозяйство страны // Измерительная техника. — 1983. — № 3.
14. Маркин Н. С. Основы теории обработки результатов измерений. — М.: Изд-во стандартов, 1991.
15. Маркин Н. С., Ершов В. С. Метрология. Введение в специальность. — М.: Изд-во стандартов, 1991.
16. Зульфугарзаде Э. Э. и др. От учения о мерах — к обеспечению единства измерений // Метрологическая служба СССР. — 1985. — № 5.
17. Камке Д., Крамер К. Физические основы единиц измерений. — М.: Мир, 1980.
18. Коротков В. П., Тайц Б. А. Основы метрологии и теории точности измерительных устройств. — М.: Изд-во стандартов, 1978.
19. Рудзаг Я. А., Плуталов В. Н. Основы метрологии, точность и надежность в приборостроении. — М.: Машиностроение, 1991.
20. Сафаров Г. П., Ершов В. С. О нормативной базе ГСИ // Метрологическая служба СССР. — 1985. — № 5.
21. Селиванов М. Н., Фридман А. Э., Кудрянова Ж. Ф. Качество измерений. — Л.: Лениздат, 1987.
22. Сена Л. А. Единицы физических величин и их размерности. 2-е изд. — М.: Наука, 1977.
23. Справочник по теории вероятностей и математической статистике. — М.: Наука, 1985.
24. Студенцов Н. В., Селиванов П. Н. Международная система единиц — закономерное развитие Метрической системы мер // Измерительная техника. — 1983. — № 3.
25. Тупиченков А. А. Метрологическое обеспечение производства. — М.: Изд-во стандартов, 1982.
26. Тюрин Н. И. Введение в метрологию. — М.: Изд-во стандартов, 1985.
27. ГОСТ 16263—70. ГСИ. Термины и определения.
28. ГОСТ 8.417—81. ГСИ. Единицы физических величин.

СОДЕРЖАНИЕ

Учебное издание

Николай Сергеевич Маркин

ПРАКТИКУМ ПО МЕТРОЛОГИИ

Редактор *Т. И. Гулидова*
Оформление художника *В. Г. Лапшина*
Технический редактор *Н. С. Гришанова*
Корректор *М. С. Кабашова*

Сдано в наб. 30.11.93. Подп. в печ. 19.01.94. Формат 60×90 1/16. Бумага типографская. Гарнитура литературная. Печать высокая. Усл. п. л. 11,75. Усл. кр.-отт. 12,0. Уч.-изд. л. 14,21. Тираж 2000 экз. Зак. 2625. Изд № 1407/07 С 988

Ордена «Знак Почета» Издательство стандартов, 107076, Москва, Колодезный пер., 14.
Калужская типография стандартов, ул. Московская, 256.